SUR LES

INTÉGRALES DE STIELTJES

ET LEURS APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

BY

N. GUNTHER

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK
1949

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

TABLE DES MATIÈRES

N. GUNTHER

SUR LES INTÉGRALES DE STIELTJES ET LEURS APPLICATIONS AUX PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PRÉFACE

Pour expliquer pourquoi j'entreprends la publication de mes recherches de trois dernières années, je me permets de citer textuellement les paroles de M. H. Lebesgue dans ses «Leçons sur l'intégration». Nous lisons * dans l'ouvrage de l'illustre auteur:

«Que les fonctions de domaine s'introduisent en physique et y apparaissent même comme plus directement adaptées aux besoins du physicien que les fonctions de point—ne doit pas nous étonner. Un point n'est que la conception limite de corps de plus en plus petits, une fonction du point ne peut s'introduire en physique que comme limite d'une fonction du corps, d'une fonction de domaine.

«Si pourtant, on parle peu de ces fonctions, c'est que les mathématiciens n'ont pas encore créé l'Algèbre et l'Analyse des fonctions de domaine. On possède par contre des notations remarquablement maniables pour les fonctions de points; aussi, par des artifices divers — mais qui se réduisent toujours au fond à ne raisonner que sur les domaines assez spéciaux pour qu'ils ne dépendent plus que d'un nombre fini de variables—remplace t'on toujours l'emploi des fonctions de domaine par celui des fonctions de point».

En commençant mes recherches en 1926, j'essayais de généraliser une formule de Stekloff par ma méthode des fonctions de Stekloff et je ne

* H. Lebesgue. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, 1928, chap. XI, p. 292.

parvins* à la solution du problème qu'en introduisant à la place de ces fonctions certaines fonctions des domaines; pour les mieux distinguer je leur ai donné dans ce mémoire le nom des «quasi-fonctions» en faisant observer en même temps, que les opérations avec ces quasi-fonctions sont identiques aux opérations avec des intégrales de Stieltjes. Depuis ma communication au Congrès des Mathématiciens à Bologne, j'emploi maintenant pour ces fonctions des domaines en vue de leurs applications le nom de «fonctions moyennes»; l'expérience ne conduit le physicien qu'à la connaissance des valeurs moyennes des objets de ces recherches, que ce soit la densité, la vitesse, la probabilité, etc.

Remarquons encore que l'utilisation des fonctions moyennes dans les recherches purement analytiques date des temps de Riemann au moins, ayant ainsi un âge surpassant 70 années: pour s'en convaincre, il suffit seulement de faire attention au problème de la sommation des séries divergentes, où les fonctions moyennes s'introduisent tout naturellement.

La formation des fonctions des points comme limites des fonctions moyennes conduit souvent à des fonctions non continues, qui nonobstant conviennent aux opérations analytiques étant, par exemple, sommables.

Or une fonction sommable étant mal définie suivant sa nature même, on ne peut pas espérer l'obtenir par un calcul direct: les séries, donnant généralement les fonctions continues, deviennent divergentes.

Cette circonstance devient un obstacle insurmontable dans les recherches, où une pareille fonction intervient comme une inconnue auxiliaire, nécessitant toujours l'invention des voies indirectes.

Comme, au contraire, la fonction moyenne est bien définie, on peut présumer, que son introduction à la place de la fonction limite rendra les calculs exacts et pratiquables.

Par exemple, on sait bien qu'une suite normale, orthogonale et fermée des fonctions $V_1, V_2, \ldots V_n \ldots$ étant donnée, quoique la série

$$a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_n V_n + \cdots, \quad a_n = \int\limits_{(D)} f V_n \, d\omega$$

---

* N. Gunther. Sur une application des fonctions universelles de M. Korn. C. R., t. 183, 1926, p. 551; он же. Об одном приложении теории замкнутости. Изв. Акад. Наук СССР, 1927, №№ 1—2 и 3—4, стр. 63 и 255.

correspondante à une fonction f, à carré intégrable, soit parfois divergente, la série

$$a_1 \cdot \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} V_1 \, d\omega + a_2 \cdot \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} V_2 \, d\omega + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} V_n \, d\omega + \cdots$$

est toujours convergente et donne la valeur de

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} f d\omega. \tag{1}$$

Il s'agit donc de poser les problèmes de manière, que la fonction moyenne (1) y entre directement et de systématiser les règles concernant les opérations avec ces fonctions moyennes; comme les fonctions moyennes utilisées jusqu'à présent n'appartiennent qu'au cas très particulier des fonctions moyennes, on peut espérer que leur théorie permettra d'aborder avec succès de nouveaux problèmes plus généraux.

Septembre 1929.

CHAPITRE 1

Les fonctions moyennes

1. Étant donné un intervalle (un intervalle proprement dit dans le cas des domaines d'une dimension, un carré, un cube, etc., dans le cas des domaines à deux, à trois, etc. dimensions), formons une suite infinie des réseaux d'intervalles

$$R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots \tag{1}$$

en prenant pour le premier membre de la suite l'intervalle, qui est donné, et en divisant en portions égales chaque intervalle d'un réseau de la suite en passant d'un nombre de la suite au suivant.

En parlant d'un intervalle nous supposons toujours que c'est un ensemble des points, qui est fermé.

Si les points envisagés appartiennent à une portion d'une ligne (pour les domaines à deux dimensions) ou à une portion d'une surface (pour les domaines à trois dimensions) nous supposons toujours que les droites parallèles à un des arêtes d'un intervalle coupent la portion de la ligne,

respectivement de la surface, en un point au plus et nous prenons pour les intervalles des réseaux sur la ligne, respectivement sur la surface, les portions de la ligne, respectivement de la surface, découpées par les réseaux (1).

Nous disons que la mesure de l'ensemble (E_1) est nulle, si, quelque soit le nombre positif ε il existe un nombre N, tel que dans chaque R_n où $n \geqq N$, la mesure totale des intervalles, ayant des points communs avec (E), ne surpasse pas ε. La mesure d'un ensemble ouvert (E) est toujours positive, car quelque soit le point (x) de (E), il est un point intérieur d'un intervalle, ayant tous ces points appartenants à (E).

Envisageons un ensemble ouvert (E) et l'ensemble (E_1) de ses points limites, qui ne sont pas les points intérieurs de (E). Si la mesure de (E_1) est nulle, nous disons que l'ensemble $(E+E_1)$ est un domaine (ω); nous disons que l'ensemble (E_1) forme la frontière de (ω).

La limite pour $n \to \infty$ de la mesure totale des intervalles du réseau R_n, qui contiennent les points de (ω) et ne contiennent pas les points de sa frontière est dite la mesure de (ω).

Si tous les points intérieurs d'un domaine (ω_1) appartiennent à (ω) et si (ω_1) ne coïncide pas avec (ω), il y a dans (ω) les points intérieurs n'appartenants pas à (ω_1); on obtient un domaine (ω_2), en ajoutant à l'ensemble (E') des points de (ω), n'appartenants pas à (ω_1), tous ces points étant limites; car chacun de ces points limites, s'il n'appartient pas à la frontière de (ω), est un point intérieur pour (ω) et s'il n'est pas un point intérieur de (E'), il appartient à la frontière de (ω_1). Le réseau R_n, qui correspond au nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ pour les frontières des domaines (ω_1) et (ω), correspond au nombre ε pour la frontière du domaine (ω_2).

Nous disons, que le domaine (ω) est décomposé en deux domaines (ω_1) et (ω_2), en écrivant

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2).$$

En désignant par ω la mesure de (ω), nous avons

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Ayant décomposé le domaine (ω) en deux portions, on peut en continuant ainsi le décomposer en trois, en quatre... en un nombre fini de por-

tions. Remarquons, qu'en continuant le procédé jusqu'à l'infini nous pouvons obtenir un ensemble

$$(\omega_1) + (\omega_2) + \cdots,$$

formé par la réunion des points des domaines (ω_1), (ω_2)..., qui est différent du domaine (ω); on obtient une pareille divison, par exemple, en réuniant les intervalles en nombre infini, qui forment l'ensemble ouvert des points intérieurs de (ω).

Si deux domaines (ω_1) et (ω_2) ont des points intérieurs communs, on obtient un domaine (ω_3) en ajoutant à l'ensemble (E) de ces points ses points limites. Le point limite de (E), s'il n'est pas un point intérieur, doit appartenir à (ω_1) ou à (ω_2) et s'il est un point intérieur de (ω_1), il est sur la frontière de (ω_2) comme un point limite des points, appartenants à (ω_1). Le réseau R_n, qui correspond au nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ pour les frontières des domaines (ω_1) et (ω_2), correspond au nombre ε pour la frontière du domaine (ω_3).

Le domaine (ω_1) devient la somme du domaine (ω_3) et d'un domaine (ω_1'); le domaine (ω_2) devient la somme du domaine (ω_3) et d'un domaine (ω_2').

2. A chaque domaine (ω_i) appartenant à un domaine (D_x) des points (x), nous faisons correspondre un nombre $u(\omega_i)$.

L'ensemble des nombres $u\ (\omega_i)$, correspondant à tous les domaines possibles, constitue une fonction $u(\omega)$ des domaines (ω).

Nous n'excluons pas le cas, quand les nombres u dépendent outre des domaines (ω) encore des points (x) du domaine (D_x), en utilisant dans ce cas le signe $u(\omega, x)$.

3. *Definition 1.* La fonction $u(\omega)$ est dite une fonction moyenne additive, si pour chaque division d'un domaine (ω), en deux domaines (ω_1) et (ω_2) on a

$$u(\omega)\,\omega = u(\omega_1)\,\omega_1 + u(\omega_2)\,\omega_2. \tag{2}$$

Exemples.

1) La fonction f étant sommable dans (D_x), posons

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} f d\omega, \tag{1}$$

en désignant par $d\omega$ l'élément du domaine (D_x).

Nous donnerons à la fonction (1) le nom de la moyenne de f.

Les fonctions de Stekloff, correspondantes à f, sont les valeurs d'une fonction moyenne de f.

2) Supposons que le domaine (D_x) est un intervalle fermé $a \leqq x \leqq b$. Soit donnée une série absolument convergente

$$(3) \qquad b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

et une suite des nombres

$$c3') \qquad x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

ontenus dans l'intérieur de l'intervalle (a, b).

En supposant que (ω) est un intervalle fermé (α, β), posons $u(\omega) = 0$, si aucun des nombres (3) n'appartient à l'intervalle (α, β), et

$$u(\omega) = \frac{1}{\beta - \alpha} \Sigma b_n$$

en cas contraire, la somme étant étendue sur tous les nombres b correspondants aux nombres x, appartenants à l'intervalle (α, β), étant posé qu'à un nombre x_n correspond le nombre b_n avec le même indice, si x_n est à l'intérieur de (α, β), et le nombre $\frac{1}{2} b_n$, si x_n est égale à α ou à β.

3) En supposant que les points (x_1) et (x) sont situés sur une surface (S), répondant à trois conditions bien connues de Liapounoff, posons

$$(4) \qquad u(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma,$$

r_{10} étant la distance entre les points (x) et (x_1) dirigée vers (x), N_0 la direction extérieure de la normale à (S) au point (x), (σ) une portion de (S). Remarquons, que la fonction moyenne (4) des (σ) est une fonction des points (x_1) de la surface (S) et une fonction continue de ces points, comme un potentiel d'une double couche, répandue sur (S) avec la densité μ égale à -1 sur (σ) et à 0 ailleurs.

4. *Définition 2.* La fonction moyenne $u(\omega)$ est dite une fonction à variation bornée, si pour chaque division du domaine (ω) en portions

$$(\omega_1), (\omega_2) \ldots (\omega_n)$$

en nombre fini on a

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + |u(\omega_2)|\,\omega_2 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n < \mathrm{B},$$

où B est un nombre détérminé.

Les fonctions des exemples (1), (2) et (3) sont à variation bornée. Si toutes les valeurs d'une fonction moyenne additive sont positives, ell est à variation bornée, car on a dans ce cas

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n = u(\omega_1)\,\omega_1 + \cdots + u(\omega_n)\,\omega_n = u(D_x)\,D_x.$$

Prenons un domaine quelconque (ω) et divisons le d'une manière quelconque en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$ en nombre fini. La fonction moyenne $u(\omega)$ étant à variation bornée, la somme

(5) $$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n$$

a une borne supérieure. Désignons la par $U(\omega)\,\omega$ et nommons $U(\omega)\,\omega$ la variation totale de $u(\omega)$ en (ω), en donnant à $U(\omega)$ le nom de la variation moyenne de $u(\omega)$ en (ω).

Remarque. Si au lieu de se borner à la division du domaine (ω) en un nombre fini de portions, on tient compte aussi d'un nombre illimité de portions, on n'augmente pas la variation totale.

En effet, supposons que la série des domaines

$$(\omega_1) + (\omega_2) + \cdots + (\omega_n) + \cdots$$

converge vers (ω). La série

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + |u(\omega_2)|\,\omega_2 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n + \cdots$$

est convergente, car la somme de ses n premiers termes est bornée.

Or

$$(\omega^{(1)}) = (\omega) - \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i)$$

étant un domaine, on a

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n + |u(\omega^{(1)})|\,\omega^{(1)} \leqq U(\omega)\,\omega,$$

d'où suit que

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n < U(\omega)\,\omega.$$

Quelque soit le nombre positif ε, on a pour un n suffisâment grand

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u(\omega_i)|\,\omega_i < \varepsilon.$$

Or la somme des n premiers termes de la série ne surpasse pas $U(\omega)\,\omega$. Il suit de là qu'on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u(\omega_i)|\,\omega_i < U(\omega)\,\omega + \varepsilon$$

et comme ε est arbitraire

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u(\omega_i)|\,\omega_i \leqq U(\omega)\,\omega.$$

Théorème. La variation d'une fonction additive et à variation bornée est additive et à variation bornée.

Suivant la définition, la variation totale $U(\omega)\,\omega$ d'une fonction additive $U(\omega)$ est la borne supérieure des sommes (5).

Divisons (ω) d'une façon quelconque en m portions (ω_1), (ω_2) . . . (ω_m). Il existe une division de (ω_i) en portions $(\omega_i^{(j)})$ telle, qu'on ait

$$U(\omega_i)\,\omega_i < \sum_j |u(\omega_i^{(j)})|\,\omega_i^{(j)} + \frac{1}{m}.$$

Il suit de là qu'on a

$$U(\omega_1)\,\omega_1 + \cdots + U(\omega_m)\,\omega_m < \sum_{i=1}^{i=m} \sum_j |u(\omega_i^{(j)})|\,\omega_i^{(j)} + 1 < \mathrm{B} + 1.$$

Comme la division de (ω) en m portions (ω_1), . . . (ω_m) était quelconque, $U(\omega)$ est à variation bornée.

Supposons maintenant, que le domaine (ω) est divisé en deux portions (ω_1) et (ω_2). Divisons les domaines (ω_1) et (ω_2) respectivement en portions:

(6) $$(\omega_1^{(1)}), \ldots, (\omega_1^{(m)}) \text{ et } (\omega_2^{(1)}), \ldots, (\omega_2^{(n)})$$

Comme $U(\omega_1)\omega_1$ et $U(\omega_2)\omega_2$ sont les bornes supérieures des sommes

$$|u(\omega_1^{(1)})|\,\omega_1^{(1)} + \cdots + |u(\omega_1^{(m)})|\,\omega_1^{(m)}, \quad |u(\omega_2^{(1)})|\,\omega_2^{(1)} + \cdots + |u(\omega_2^{(n)})|\,\omega_2^{(n)},$$

on a pour un choix convenable des domaines (6):

$$U(\omega_1)\,\omega_1 - \varepsilon < |u(\omega_1^{(1)})|\,\omega_1^{(1)} + \cdots + |u(\omega_1^{(m)})|\,\omega_1^{(m)}$$

$$U(\omega_2)\,\omega_2 - \varepsilon < |u(\omega_1^{(2)})|\,\omega_1^{(2)} + \cdots + |u(\omega_2^{(n)})|\,\omega_2^{(n)};$$

on trouve en additionnant

$$U(\omega_1)\,\omega_1 + U(\omega_2)\,\omega_2 - 2\varepsilon < \sum_{i=1}^{i=m} |u(\omega_1^{(i)})|\,\omega_1^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} |u(\omega_2^{(i)})|\,\omega_2^{(i)} \leqq U(\omega)\,\omega.$$

D'un autre côté en divisant convenablement (ω) en portions $(\omega^{(1)}) \ldots (\omega^{(r)})$ on trouve

$$(7) \qquad U(\omega)\,\omega - \varepsilon < |u(\omega^{(1)})|\,\omega^{(1)} + \cdots + |u(\omega^{(r)})|\,\omega^{(r)}.$$

En désignant par $(\omega_1^{(s)})$ et par $(\omega_2^{(s)})$ les portions communes du domaine $(\omega^{(s)})$, avec les domaines (ω_1) et (ω_2), nous avons

$$u(\omega^{(s)})\,\omega^{(s)} = u(\omega_1^{(s)})\,\omega_1^{(s)} + u(\omega_2^{(s)})\,\omega_2^{(s)},$$

d'où suit

$$|u(\omega^{(s)})|\,\omega^{(s)} \leqq |u(\omega_1^{(s)})|\,\omega_1^{(s)} + |u(\omega_2^{(s)})|\,\omega_2^{(s)}.$$

On a donc

$$U(\omega)\,\omega - \varepsilon < \sum_{s=1}^{s=r} |u(\omega_1^{(s)})|\,\omega_1^{(s)} + \sum_{s=1}^{s=r} |u(\omega_2^{(s)})|\,\omega_2^{(s)} < U(\omega_1)\,\omega_1 + U(\omega_2)\,\omega_2.$$

On trouve ainsi

$$U(\omega_1)\,\omega_1 + U(\omega_2)\,\omega_2 - 2\varepsilon < U(\omega)\,\omega < U(\omega_1)\,\omega_1 + U(\omega_2)\,\omega_2 + \varepsilon,$$

d'où suit

$$U(\omega)\,\omega = U(\omega_1)\,\omega_1 + U(\omega_2)\,\omega_2.$$

Théorème. La fonction moyenne additive et à variation bornée $u(\omega)$ est égale à la différence de deux fonctions moyennes $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ additives et à variation bornée ayant toutes leurs valeurs positives.

Pour démontrer le théorème il suffit de poser

$$u_1(\omega)=\frac{1}{2}\left(U(\omega)+u(\omega)\right),\quad u_2(\omega)=\frac{1}{2}\left(U(\omega)-u(\omega)\right). \tag{8}$$

Il suit de là qu'on a à la fois

$$u(\omega)=u_1(\omega)-u_2(\omega),\qquad U(\omega)=u_1(\omega)+u_2(\omega).$$

Nous nommerons les fonctions (8), définies par les formules (8), la partie positive et négative de $u(\omega)$.

Remarquons, que la décomposition de la fonction $u(\omega)$ en différence de deux fonctions positives peut être faite de plusieures manières.

Si $w(\omega)$ est une fonction moyenne additive et à variation bornée ayant ses valeurs positives, on a

$$u(\omega)=u_1'(\omega)-u_2'(\omega), \tag{8'}$$

si on pose

$$u_1'(\omega)=u_1(\omega)+w(\omega),\quad u_2'(\omega)=u_2(\omega)+w(\omega).$$

On s'assure aisément, que la règle donnée conduit à toutes les décompositions possibles de $u(\omega)$. En effet, de la formule (8') on déduit

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1+\cdots+|u(\omega_n)|\,\omega_n\leqq u_1'(\omega_1)\,\omega_1+\cdots+u_1'(\omega_n)\,\omega_n+$$
$$+u_2'(\omega_1)\,\omega_1+\cdots+u_2'(\omega_n)\,\omega_n,$$

d'où suit

$$U(\omega)\,\omega=\left(u_1(\omega)+u_2(\omega)\right)\omega\leqq\left(u_1'(\omega)+u_2'(\omega)\right)\omega,$$

les fonctions $u_1'(\omega)$ et $u_2'(\omega)$ étant additives.

Comme on a

$$u_1(\omega)-u_2(\omega)=u_1'(\omega)-v_2'(\omega),$$

on en déduit

$$u_1(\omega)\leqq u_1'(\omega),\quad u_2(\omega)\leqq u_2'(\omega).$$

On s'assure aisément, par exemple, que pour la fonction de l'exemple (3) on peut poser

$$u_1(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right\}$$

$$u_2(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma - \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right\}.$$

On peut, en effet, entourer le point (x_1) par une portion de surface (δ) découpée par une sphère, dont le rayon est assez petit pour qu'on ait

$$\left|\int\limits_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right| < \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Décomposons $(\sigma - \delta)$ en portions $(\sigma_2), \ldots, (\sigma_n)$. Comme on a

$$|u(\delta)|\,\delta + |u(\sigma_2)|\,\sigma_2 + \cdots + |u(\sigma_n)|\,\sigma_n =$$
$$= \frac{\theta\varepsilon}{3} + \left|\frac{\cos(r_{12} N_2)}{r_{12}^2}\right|\sigma_2 + \cdots + \left|\frac{\cos(r_{1n} N_n)}{r_{1n}^2}\right|\sigma_n,$$

les points $(x_2), \ldots, (x_n)$ étant situés dans $(\sigma_2), \ldots, (\sigma_n)$ et comme, n étant assez grand, la somme à droite diffère de

$$\frac{\theta\varepsilon}{3} + \int\limits_{(\sigma-\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma,$$

moins que $\frac{\varepsilon}{3}$, on voit que, ε étant arbitraire,

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma \leqq U(\sigma)\,\sigma + \varepsilon.$$

Comme les fonctions $u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma)$ sont positives, la dernière égalité montre, qu'on doit avoir

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma = U(\sigma)\,\sigma.$$

Faisons encore une remarque, en supposant que les valeurs de la fonction $u(\omega)$ sont positives. Supposons, que (ω) est décomposée en une infinité des domaines

$$(\omega) = (\omega_1) + \cdots + (\omega_n) + \cdots$$

En désignant, comme tout à l'heure, par $(\omega^{(1)})$ le domaine

$$(\omega) - \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i)$$

nous avons

$$u(\omega_1)\,\omega_1 + \cdots + u(\omega_n)\,\omega_n + u(\omega^{(1)})\,\omega^{(1)} = u(\omega)\,\omega,$$

d'où suit

$$u(\omega_1)\,\omega_1 + \cdots + u(\omega_n)\,\omega_n < u(\omega)\,\omega.$$

La série

$$u(\omega_1)\,\omega_1 + \cdots + u(\omega_n)\,\omega_n + \cdots$$

est donc convergente, ayant une somme des n premiers termes bornée et sa somme ne surpasse pas $u(\omega)\,\omega$. Si la somme de cette série est toujours égale à $u(\omega)$, la fonction $u(\omega)$ est dite absolument additive.

5. Supposons que le domaine $(\underline{\omega})$ est contenu dans (ω), n'ayant pas des points communs avec la frontière de (ω), et que le domaine $(\overline{\omega})$ contient également (ω) dans son intérieur. En formant $(\underline{\omega})$ on peut, par exemple, prendre la somme des intervalles d'un réseau R_n contenants les points intérieurs de (ω) et ne contenants pas les points sur sa frontière.

Les limites

$$\lim u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}, \quad \lim u(\overline{\omega})\,\omega \tag{9}$$

quand $(\underline{\omega})$ et $(\overline{\omega})$ tendent à se confondre avec (ω), sont en général différentes de $u(\omega)\,\omega$, comme le montre l'exemple (2) du § 1.

En effet, si $(\underline{\omega})$ est l'intervalle $(x_1' + \eta,\ x_2 - \eta)$, la limite de $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ est égale à zéro quand $\eta \to 0$, tandis que, si (ω) est l'intervalle (x_1, x_2), on a

$$u(\omega)\,\omega = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).$$

Désignons les limites (9) respectivement par $\underline{u}(\omega)\,\omega$ et $\overline{u}(\omega)\,\omega$.

Si toutes les valeurs de $u(\omega)$ sont positives, on a

$$\underline{u}(\omega) \leqq u(\omega) \leqq \overline{u}(\omega)$$

car, par exemple, on a

$$u(\underline{\omega})\,\underline{\omega} + u(\omega - \underline{\omega})\,(\omega - \underline{\omega}) = u(\omega)\,\omega.$$

La dernière égalité et l'égalité analogue, correspondante à $u(\overline{\omega})\,\overline{\omega}$, en démontrant l'existence des limites $\underline{u}(\omega)$ et $\overline{u}(\omega)$ pour les fonctions à valeur positive, la démontre également pour toutes les fonctions moyennes additives et à variation bornée.

Pour s'assurer que la limite $\underline{u}(\omega)$ ne dépend pas de la loi de la variation de $(\underline{\omega})$ on peut, en parlant d'une fonction $u(\omega)$ à valeur positive, prendre en premier lieu les domaines formés par des intervalles, mentionnés ci-dessus. Quelque soit $(\underline{\omega})$ on peut l'enfermer entre deux domaines ayant la forme décrite.

Définition 3. La fonction moyenne $u(\omega)$ est dite continue, si pour chaque domaine (ω) on a

$$\lim u(\underline{\omega})\,\underline{\omega} = u(\omega)\,\omega. \tag{10}$$

La fonction moyenne additive peut être continue sans être à variation bornée; si la fonction continue $\varphi(x)$ n'est pas à variation bornée, la fonction moyenne

$$u(\omega) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \omega = \beta - \alpha$$

étant continue, n'est pas à variation bornée.

Remarquons que, si la fonction $u(\omega)$ est continue, on a aussi

$$\lim u(\overline{\omega})\,\overline{\omega} = \overline{u}(\omega)\,\omega = u(\omega)\,\omega.$$

En effet, supposons que le domaine $(\Omega + \omega)$ contient (ω), que (Ω_1) est un domaine contenu dans (Ω), ayant sa frontière extérieure commune avec celle de (Ω), que (Ω_2) est un domaine contenu dans (Ω), ayant sa frontière intérieure commune avec celle de (ω) et que (Ω_3) est égale à $(\Omega - \Omega_1 - \Omega_2)$.

Comme la fonction $u(\omega)$ est continue, la limite

$$u(\Omega_1)\,\Omega_1, \quad (\Omega_1) \rightarrow 0$$

est égale à zéro. Comme la limite de $u(\Omega_3)\Omega_3$ est égale à $u(\Omega)\Omega$, quand $(\Omega_3) \to (\Omega)$ et comme

$$u(\Omega)\Omega = u(\Omega_3)\Omega_3 + u(\Omega_1)\Omega_1 + u(\Omega_2)\Omega_2$$

on a

$$\lim u(\Omega_2)\Omega_2 = 0,$$

d'où suit que

$$\lim u(\omega + \Omega_2)(\omega + \Omega_2) = \lim u(\overline{\omega})\overline{\omega} = \overline{u}(\omega)\omega = u(\omega)\omega.$$

On s'assure de la même manière que la fonction $u(\omega)$ est continue, si pour chaque domaine (ω) on a

$$\overline{u}(\omega)\omega = u(\omega)\omega.$$

Il suffit pour cela de construire le domaine $(\omega + \Omega)$, contenant (ω) le domaine $(\omega + \Omega + \Omega_1)$, contenant $(\omega + \Omega)$, et le domaine $(\omega - \Omega_2)$, contenu dans (ω). Comme on a

$$u(\omega + \Omega + \Omega_1)(\omega + \Omega + \Omega_1) = u(\omega + \Omega)(\omega + \Omega) + u(\Omega_1)\Omega_1,$$
$$u(\Omega + \Omega_1 + \Omega_2)(\Omega + \Omega_1 + \Omega_2) = u(\Omega)\Omega + u(\Omega_1)\Omega_1 + u(\Omega_2)\Omega_2,$$

on conclut successivement que

$$\lim u(\Omega_1)\Omega_1 = 0, \quad \Omega_1 \to 0, \quad \lim u(\Omega_2)\Omega_2 = 0, \quad \Omega_2 \to 0$$

et

$$\lim u(\omega - \Omega_2)(\omega - \Omega_2) = u(\omega)\omega - \lim u(\Omega_2)\Omega_2 = u(\omega)\omega, \quad \Omega_2 \to 0.$$

Supposons, que les valeurs de $u(\omega)$ sont positives. Si $(\underline{\omega})$ est contenue dans (ω) et si on divise (ω) en deux portions (ω_1) et (ω_2), $(\underline{\omega})$ sera divisé en deux portions $(\omega_1^{(1)})$ et $(\omega_2^{(1)})$. On a

$$u(\underline{\omega})\underline{\omega} = u(\omega_1^{(1)})\omega_1^{(1)} + u(\omega_2^{(1)})\omega_2^{(1)}.$$

Il suit de là

$$\underline{u}(\omega)\omega = \lim u(\underline{\omega})\underline{\omega} = \lim u(\omega_1^{(1)})\omega_1^{(1)} + \lim u(\omega_2^{(1)})\omega_2^{(1)} \geqq \underline{u}(\omega_1)\omega_1 +$$
$$+ \underline{u}(\omega_2)\omega_2,$$

les limites des $u(\omega^{(1)})\,\omega_1^{(1)}$ et $u(\omega_2^{(1)})\,\omega_2^{(1)}$ pouvant être plus grandes que

$$\underline{u}(\omega_1)\,\omega_1,\ \underline{u}(\omega_2)\,\omega_2,$$

car $(\omega_1^{(1)})$, $(\omega_2^{(1)})$ ont des points communs avec les frontières de (ω_1) et de (ω_2).

On a donc

$$\underline{u}(\omega)\,\omega \geqq \underline{u}(\omega_1)\,\omega_1 + \underline{u}(\omega_2)\,\omega_2.$$

Divisons le domaine (ω) d'une manière quelconque en portions

$$(\omega_1),\ (\omega_2)\ \ldots\ (\omega_n)$$

en nombre fini et formons la somme

$$\underline{u}(\omega_1)\,\omega_1 + \underline{u}(\omega_2)\,\omega_2 + \cdots + \underline{u}(\omega_n)\,\omega_n. \tag{11}$$

Désignons par $l(\omega)\,\omega$ la borne inférieure des sommes (11). La fonction moyenne $l(\omega)$ est une fonction additive.

Supposons que le domaine (ω) est divisé en deux portions (ω_1) et (ω_2). Divisons les domaines (ω_1) et (ω_2) respectivement en portions (6).

On a pour un choix convenable des domaines (6):

$$\underline{u}(\omega_1^{(1)})\,\omega_1^{(1)} + \cdots + \underline{u}(\omega_1^{(m)})\,\omega_1^{(m)} < l(\omega_1)\,\omega_1 + \varepsilon$$
$$\underline{u}(\omega_2^{(1)})\,\omega_2^{(1)} + \cdots + \underline{u}(\omega_2^{(n)})\,\omega_2^{(n)} < l(\omega_2)\,\omega_2 + \varepsilon$$

et on trouve en additionnant

$$l(\omega)\,\omega < \sum_{i=1}^{i=m} \underline{u}(\omega_1^{(i)})\,\omega_1^{(i)} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \underline{u}(\omega_2^{(i)})\,\omega_2^{(i)} < l(\omega_1)\,\omega_1 + l(\omega_2)\,\omega_2 + 2\varepsilon.$$

D'un autre côté en divisant convenablement (ω) en portions

$$(\omega^{(1)}),\ \ldots,\ (\omega^{(r)})$$

on trouve

$$\underline{u}(\omega^{(1)})\,\omega^{(1)} + \cdots + \underline{u}(\omega^{(r)})\,\omega^{(r)} < l(\omega)\,\omega + \varepsilon.$$

En désignant par $(\omega_1^{(s)})$ et par $(\omega_2^{(s)})$ les portions communes du domaine $(\omega^{(s)})$ avec les domaines (ω_1) et (ω_2), nous avons

$$\underline{u}(\omega^{(s)})\,\omega^{(s)} > \underline{u}(\omega_1^{(s)})\,\omega_1^{(s)} + \underline{u}(\omega_2^{(s)})\,\omega_2^{(s)},$$

d'où suit

$$l(\omega_1)\,\omega_1 + l(\omega_2)\,\omega_2 < \sum_{s=1}^{s=r} \underline{u}(\omega_1^{(s)})\,\omega_1^{(s)} + \sum_{s=1}^{s=r} \underline{u}(\omega_2^{(s)})\,\omega_2^{(s)} < l(\omega)\,\omega + \varepsilon.$$

On a donc

$$l(\omega_1)\,\omega_1 + l(\omega_2)\,\omega_2 - \varepsilon < l(\omega)\,\omega < l(\omega_1)\,\omega_1 + l(\omega_2)\,\omega_2 + 2\varepsilon$$

et on conclut que

(12) $$l(\omega)\,\omega = l(\omega_1)\,\omega_1 + l(\omega_2)\,\omega_2.$$

En envisageant la fonction

(13) $$u(\omega) - \underline{u}(\omega)$$

on voit que

$$\begin{aligned}&\left(u(\omega_1) - \underline{u}(\omega_1)\right)\omega_1 + \left(u(\omega_2) - \underline{u}(\omega_2)\right)\omega_2 = \\ &= u(\omega)\,\omega - \left(\underline{u}(\omega_1)\,\omega_1 + \underline{u}(\omega_2)\,\omega_2 \geqq u(\omega)\,\omega - \underline{u}(\omega)\,\omega.\end{aligned}$$

Désignons par $L(\omega)\,\omega$ la borne supérieure des sommes

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(u(\omega_i) - \underline{u}(\omega_i)\right)\omega_i.$$

On s'assure aisément qu'on a

(14) $$u(\omega) = l(\omega) + L(\omega).$$

En effet pour une division convenable de (ω) en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$ on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \underline{u}(\omega_i)\,\omega_i < l(\omega)\,\omega + \varepsilon.$$

Comme pour chaque division de (ω) en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$ on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(u(\omega_i) - \underline{u}(\omega_i)\right) \omega_i = u(\omega)\omega - \sum_{i=1}^{i=n} \underline{u}(\omega_i)\omega_i \leqq L(\omega)\omega,$$

on trouve

$$u(\omega)\omega < l(\omega)\omega + L(\omega)\omega + \varepsilon.$$

D'un autre côté pour une division convenable de (ω) en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$ on a

$$L(\omega)\omega - \varepsilon < \sum_{i=1}^{i=n} \left(u(\omega_i) - u(\omega_i)\right) \omega_i = u(\omega)\omega - \sum_{i=1}^{i=n} \underline{u}(\omega_i)\omega_i$$

et

$$l(\omega)\omega \leqq \sum_{i=1}^{i=n} \underline{u}(\omega_i)\omega_i$$

d'où suit

$$l(\omega)\omega + L(\omega)\omega - \varepsilon < u(\omega)\omega.$$

On a donc

$$l(\omega)\omega + L(\omega)\omega - \varepsilon < u(\omega)\omega < \left(l(\omega) + L(\omega)\right)\omega + \varepsilon,$$

d'où on conclut

$$u(\omega)\omega = l(\omega)\omega + L(\omega)\omega.$$

Nous dirons, que la fonction $L(\omega)$ détérmine les sauts de la fonction $u(\omega)$. Démontrons maintenant que $l(\omega)$ est continue.

Désignons par (ω) un domaine quelconque, $(\underline{\omega})$ un domaine dans son intérieur, (ω_1) la différence entre (ω) et $(\underline{\omega})$.

Imaginons un domaine (Ω) variant de $(\underline{\omega})$ à (ω) de manière que sa mesure augmente; si $h = \Omega - \underline{\omega}$, h varie de 0 à $h_0 = \omega - \underline{\omega}$ et on peut traiter (Ω) et $u(\Omega)\Omega$ comme les fonctions de h.

Si

$$u(\Omega)\Omega = f(h),$$

$f(h)$ est une fonction croissante.

Donnons à h deux valeurs h_1 et h_2

$$0 < h_1 < h_2 < h_0$$

et soient (Ω_1) et (Ω_2) les domaines (Ω) qui leurs correspondent. Ayant posé

$$(\underline{\omega}_1) = (\Omega_2 - \Omega_1),$$

nous avons

$$u(\underline{\omega}_1)\,\underline{\omega}_1 = u(\Omega_2)\,\Omega_2 - u(\Omega_1)\,\Omega_1 = f(h_2) - f(h_1)$$

et obtenons

$$l(\omega_1)\,\omega_1 \leqq \underline{u}(\omega_1)\,\omega_1 = \lim u(\underline{\omega}_1)\,\omega_1 = f(h_0 - 0) - f(+0).$$

La différence

$$f(h_0 - 0) - f(+0)$$

étant infiniment petite pour $h_0 \to 0$, on voit que $l(\omega_1)\,\omega_1$ l'est aussi.

Théorème. Si la fonction moyenne additive et à variation bornée $u(\omega)$ est continue, ses parties positive et négative le sont aussi.

Supposons, que $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ soient les parties positive et négative de la fonction $u(\omega)$:

$$u(\omega) = u_1(\omega) - u_2(\omega).$$

Si la fonction $u(\omega)$ est continue, on a

$$u(\omega)\,\omega - \underline{u}(\omega)\,\omega = \big(u_1(\omega)\,\omega - \underline{u}_1(\omega)\,\omega\big) - \big(u_2(\omega)\,\omega - \underline{u}_2(\omega)\,\omega\big) = 0.$$

Les fonctions $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ ayant les mêmes sauts, leurs fonctions des sauts sont égales et on a

$$u_1(\omega) = l_1(\omega) + L(\omega),\ u_2(\omega) = l_2(\omega) + L(\omega),$$

les fonctions $l_1(\omega)$, $l_2(\omega)$ étant continues. Comme on a

$$u(\omega) = l_1(\omega) - l_2(\omega)$$

les fonctions $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ ne sont pas les parties positive et négative de $u(\omega)$, si $L(\omega)$ est différente de zéro.

On conclut du théorème, que la fonction moyenne additive et à variation bornée étant continue, sa variation moyenne l'est aussi.

Les sauts d'une fonction additive à valeurs positives sont positifs.

Comme on a

$$U(\omega) = u_1(\omega) + u_2(\omega),$$

les sauts de la fonction $U(\omega)$ étant égaux à zéro, les sauts des fonctions $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ doivent l'être aussi. Il suit de là que la fonction $u(\omega)$ est continue, si sa variation moyenne $U(\omega)$ est continue.

6. Envisageons la suite des réseaux des intervalles (1).

Une fonction moyenne $u(\omega)$ additive et à variation bornée des domaines (ω) étant donnée, on peut dire qu'une fonction $u(i)$ des intervalles (i) de la suite des réseaux est donnée. Si un intervalle (i) est contenu dans (D_x), on connait $u(i)$; si tous les points de (i) sont extérieurs à (D_x), on peut poser $u(i) = 0$; si (i) est la somme de deux portions $(\omega^{(1)})$ et $(\omega^{(2)})$, dont la première est extérieure à (D_x), on peut poser

$$u(i) = \frac{u(\omega^{(1)})\,\omega^{(1)}}{i}. \tag{15}$$

Réciproquement, si la fonction $u(\omega)$ est continue, elle est complètement définie, quand on donne cette fonction $u(i)$ des intervalles, chaque domaine (ω) étant la limite des domaines inscrits, formés par des intervalles.

Si la fonction moyenne $u(\omega)$ additive et à variation bornée est continue, on peut la généraliser en formant avec son aide une fonction moyenne des ensembles mesurables (M), appartenant à un certain corps (A), telle qu'on ait

$$u(M_1)\,|M_1| + u(M_2)\,|M_2| = u(M_1 + M_2)\,|M_1 + M_2|, \tag{a}$$

les ensembles (M_1) et (M_2) n'ayant pas les points communs, et

$$|u(M_1)|\,|M_1| + \cdots + |u(M_n)|\,|M_n| < B \tag{b}$$

pour chaque série des ensembles (M_1), (M_2), ... (M_n) sans points communs, contenus dans (D_x), $|M|$ étant la mesure $|M|$.

Pour démontrer ce point il suffit de suivre la méthode indiquée par M. L. Schlesinger,* qui consiste dans l'application de la théorie de la mesure des ensembles à la fonction $u(\omega)$.

Comme cette généralisation n'a qu'une valeur secondaire pour ce qui suit, nous nous contentons ici de l'indications des étapes principales de la démonstration. En suivant pas à pas les raisonnements des alinéas 11—14

---

* Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, p. 151.

de l'ouvrage mentionné de M. L. Schlesinger, supposons, en s'appuyant sur le théorème du § 4, que les valeurs de $u(\omega)$ soient positives.

Supposons, que (h) est un intervalle quelconque et désignons par (h') l'ensemble ouvert, formé par ses points intérieurs. Etant donné un ensemble mesurable (M) on peut l'enfermer dans un système dénombrable des intervalles ouverts

$$(16) \qquad (h_1'), (h_2'), \ldots (h_n'), \ldots$$

Chaque ensemble (h') étant une somme d'une infinité dénombrable des intervalles (i_k) des suites des réseaux (1), on peut dire que l'ensemble (M) est enfermé dans un système dénombrable des intervalles

$$(17) \qquad (i_1), (i_2), \ldots, (i_n), \ldots$$

chaque point de (M) étant dans l'intérieur des intervalles (17).

En triant les intervalles (17) on peut les partager en groupes des intervalles, appartenants aux réseaux $(R_1) \ldots (R_n) \ldots$. Si on efface maintenant dans la suite (17) chaque intervalle, qui est en entier dans l'intérieur d'un intervalle qui lui précède et si on efface dans chaque intervalle la portion, qui est dans l'intérieur d'un des intervalles précédants, en donnant à la portion restante la forme d'une somme des intervalles, appartenants à un réseau (R_ν) à l'indice ν plus grand, on transforme la suite (17) en une suite des intervalles distincts. Les points de l'ensemble (M) peuvent, maintenant, être situés sur les frontières communes des intervalles (17).

Formons la série

$$(18) \qquad u(i_1)\, i_1 + u(i_2)\, i_2 + \cdots + u(i_n)\, i_n + \cdots$$

qui est convergente, ayant ses termes positifs et une somme bornée des n premiers termes, car

$$\left((R_1 - \sum_{k=1}^{k=n} i_k)\right)$$

est un domaine.

En choisissant de toutes les manières possibles les intervalles (16), désignons par

$$(19) \qquad u(M)\,|M|$$

la borne inférieure des sommes (18), $|M|$ étant la mesure de l'ensemble (M).

Le nombre (19) étant bien défini, nous obtenons ainsi la valeur de $u(M)$ pour chaque ensemble (M) dont la mesure est positive. Pour les ensembles de mesure nulle, il s'agit seulement du nombre (19). Posons encore

$$u(M - M) = 0.$$

1) Les intervalles (17), qui couvrent l'intervalle ouvert (i'), sont compris dans les intervalles (i_1), (i_2), ... (i_m), formant un domaine contenant (i), pour lesquels la somme

$$\sum_{j=1}^{j=m} i_j$$

diffère aussi peu qu'on voudra de la mesure de (i).

Comme, à cause de la continuité de la fonction $u(\omega)$, on a

$$\lim \sum_{j=1}^{j=m} u(i_j)\, i_j = u(i)\, i$$

on voit que

$$u(i') = u(i).$$

On peut donc remplacer dans (18) quelques termes $u(i_1)$, ... $u(i_n)$, ... par $u(i_1')$, ... $u(i_n')$, ... sans rien changer.

En suivant maintenant l'exposition de M. Schlesinger on déduit aisément que:

2) Si l'ensemble (M_2) est contenu dans (M_1):

$$u(M_2)\,|M_2| \leqq u(M_1)\,|M_1|.$$

Ainsi, si l'ensemble (i'') ne diffère de l'intervalle (i) que par quelques points sur la frontière, on a

$$(i') \leqq (i'') < (i), \quad u(i'') = u(i') = u(i).$$

3) On a pour les ensembles (M_1) et (M_2):

$$u(M_1 + M_2)\,|M_1 + M_2| \leqq u(M_1)\,|M_1| + u(M_2)\,|M_2|.$$

4) Si

$$(M) = (M_1) + (M_2) + \cdots$$

on a

$$u(M)|M| \leq u(M_1)|M_1| + u(M_2)|M_2| + \cdots$$

5) Si (O) est un ensemble ouvert contenant (M), le nombre (19) est égale à la borne inférieure des nombres

$$u(O)|O|.$$

6) Si l'ensemble (M) est une somme des intervalles (i_k) en nombre fini ou non, qui n'ont pas des points intérieurs communs, comme, par exemple, un ensemble ouvert, on a

$$u(M)|M| = \Sigma u(i_k)|i_k|. * \tag{20}$$

7) Si (M_1) et (M_2), sont les ensembles sans points communs, répondant à la condition de l'alinéa (6), on a

$$u(M_1 + M_2)|M_1 + M_2| = u(M_1)|M_1| + u(M_2)|M_2|. \tag{21}$$

8) Si $(M_1), (M_2), \ldots$ sont les ensembles sans points communs, répondant à la condition de l'alinéa (6), on a

$$u(M)|M| = \sum_{i=1}^{\infty} u(M_i)|M_i|. \tag{22}$$

---

* Si

$$(M) = \sum_1^{\infty} (i_k), \quad \sum_k u(\alpha_k)\alpha_k < u(M)|M| + \epsilon, \quad \alpha_\nu i_k = \beta_\nu^{(k)},$$

i_k n'ont pas des points communs, on a:

$$(i_k) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_\nu^{(k)}). \quad (\alpha_\nu) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_\nu^{(k)})$$

et

$$u(M)|M| \leq \sum_{k=1}^{\infty} u(i_k) i_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} u(\beta_\nu^{(k)}) \beta_\nu^{(k)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} u(\alpha_\nu) \alpha_\nu \leq u(M)|M| + \epsilon$$

d'où suit l'égalité (20).

9) En se basant sur l'assertion de l'alinéa (7) on trouve pour deux ensembles ouverts (O_1) et (O_2), que

$$u(O_2 - O_1)|O_2 - O_1| = u(O_2)|O_2| - u(O_1)|O_1|, \quad (O_1 < O_2)$$
$$u(O_1 + O_2)|O_1 + O_2| + u(O_1 O_2)|O_1 O_2| = u(O_1)|O_1| + u(O_2)|O_2|.$$

10) Si l'ensemble (M) est contenu dans un ensemble ouvert (O) et si l'on pose

$$u_i(M)|M| = u(O)|O| - u(O - M)|O - M|,$$

le nombre $u_i(M)|M|$ ne dépend pas du choix de (O). On a toujours

$$u_i(M)|M| \leqq u(M)|M|.$$

Supposons maintenant que la fonction $u(M)$ n'est considérée que pour les ensembles (M) répondant à la condition

(24) $$u_i(M)|M| = u(M)|M|.$$

Convenons de dire, que l'ensemble (M) vérifiant l'égalité (24) appartient au corps (A) des ensembles. On démontre aisément, que si l'ensemble (M) appartient au corps (A), l'ensemble $(O - M)$ lui appartient aussi; que ce corps (A) contient les ensembles ouverts, les intervalles, les ensembles fermés, les ensembles pour lesquelles le nombre (19) est égale à zéro, entre autres les ensembles dénombrables.

Enfin on démontre, que si les ensembles (M_1) et (M_2) appartiennent au corps (A), les ensembles $(M_1 \cdot M_2)$ et $(M_1 + M_2)$ lui appartiennent aussi et si (M_1) et (M_2) n'ont pas des points communs, pour ces ensembles l'égalité (21) est satisfaite; si les ensembles (M_1), (M_2) . . ., qui sont sans points communs, lui appartiennent, l'ensemble

$$(M) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_i)$$

lui appartient aussi et l'égalité (22) subsiste pour ces ensembles. Ayant en vue l'égalité (22) nous disons, que la fonction $u(M)$ est absolument additive.

7. *Définition 4.* La fonction moyenne additive $u(\omega)$ est dite absolument continue, si quelque soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre η de manière qu'on ait

$$(25) \qquad |u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_p)|\,\omega_p <$$

quand

$$(25\ ) \qquad \omega_1 + \cdots + \omega_p < \eta,$$

quelque soit le nombre fini p, les domaines $(\omega_1)\ldots(\omega_p)$ pouvant n'être pas contigus.

Remarque. Si la dimension du domaine (D_x) est plus grande que l'unité, on peut simplifier cette définition en disant, que la fonction $u(\omega)$ est absolument continue, si pour chaque nombre positif ε, on peut assigner un nombre η, tel que

$$|u(\omega)|\,\omega < \varepsilon,$$

la mesure du domaine (connexe) (ω) étant plus petite que η.

Evidemment, la somme

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_p$$

étant égale à un nombre η_1, moindre que η, on peut toujours unir les domaines (ω_1), $(\omega_2)\ldots(\omega_p)$ par des tubes ayant une mesure moindre que $\eta - \eta_1$ et former ainsi un domaine connexe (ω).

Si la fonction additive $u(\omega)$ est absolument continue, pour chaque division du domaine (D_x) en portions $(\omega_1),\ldots(\omega_n)$ subsiste l'inégalité

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n < B,$$

B étant un nombre déterminé.

Supposons que l'inégalité (25) soit satisfaite pour $\varepsilon = 1$, si $\eta = \eta_0$. Choisissons parmi les réseaux (1) le réseau R_ν qui est coupé par les frontières des intervalles, parallèles à un plan des coordonnées, en tranches, de manière, que la mesure de chaque tranche soit moindre que η_0. Supposons que nous obtenons N tranches. Les frontières des tranches coupent les domaines $(\omega_1),\ldots(\omega_n)$, ce qui augmente la somme

$$(26) \qquad |u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n.$$

Or, la mesure de chaque tranche étant moindre que η_0, la somme (26) se transforme en N sommes, chacune desquelles est moindre que 1. On a donc pour chaque choix des domaines $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n < N.$$

On en conclut que chaque fonction $u(\omega)$, qui est absolument continue, est à variation bornée.

Si la fonction $u(\omega)$ est absolument continue, sa variation moyenne $U(\omega)$ l'est aussi. Pour le démontrer dans le cas, quand la dimension de (D_x) urpasse l'unité, il suffit d'observer, que, si

$$\omega < \eta,$$

on a

$$|u(\omega_1)|\,\omega_1 + \cdots + |u(\omega_n)|\,\omega_n < \varepsilon;$$

la borne supérieure des sommes (26) ne peut donc pas surpasser ε.

Si la dimension de (D_x) est égale à l'unité, il suffit, ayant choisi le nombre p, de trouver le nombre η correspondant à $\frac{\varepsilon}{p}\cdot$ Il suit de là, que, si a fonction $u(\omega)$ est absolument continue, ses parties positive et négative le sont aussi.

Si la fonction $u(\omega)$ est absolument continue, elle est absolument additive. Il suffit de démontrer l'assertion pour les parties positive et négative $u(\omega)$.

Supposons, que $u(\omega)$ est positive et supposons, qu'on a

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + \cdots + (\omega_n) + \cdots$$

En désignant comme ci-dessus par $(\underline{\omega}_i)$ un domaine dans l'intérieur de (ω_i), n'ayant pas des points communs avec (ω_i), nous avons

$$u(\underline{\omega}_1)\,\underline{\omega}_1 + \cdots + u(\underline{\omega}_n)\,\underline{\omega}_n + u(\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \underline{\omega}_k)(\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \underline{\omega}_k) = u(\omega)\,\omega.$$

Or si n est assez grand, la mésure du domaine

$$\left(\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \underline{\omega}_n\right) \tag{27}$$

est moindre que η. On en conclut, que

$$\left|u(\omega)\,\omega - \sum_{k=1}^{k=n} u(\omega_k)\,\omega_k\right| < \varepsilon, \quad \text{si } n \geqq N,$$

d'où

$$\left|u(\omega)\,\omega - \sum_{k=1}^{k=n} u(\omega_k)\,\omega_k\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{si } n \geqq N.$$

Il suit de là, que

$$u(\omega)\,\omega = u(\omega_1)\,\omega_1 + u(\omega_2)\,\omega_2 + \cdots \tag{28}$$

Théorème. Étant donnée une fonction moyenne additive $u(\omega)$, si la fonction

$$|u(\omega)|^{1+\lambda}, \quad \lambda > 0$$

est à variation bornée, la fonction $u(\omega)$ est absolument continue. En utilisant l'inégalité connue de Hölder

$$\Sigma a_i b_i < \left(\Sigma a_i^{\frac{1+\lambda}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} (\Sigma b_i^{1+\lambda})^{\frac{1}{1+\lambda}}$$

on trouve

$$\sum_{i=1}^{i=p} |u(\omega_i)|\,\omega_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=p} |u(\omega_i)|\,\omega_i^{\frac{1}{1+\lambda}} \cdot \omega_i^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} < \left(\sum_{i=1}^{i=p} \omega_i\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \sum_{i=1}^{i=p} |u(\omega_i)|^{1+\lambda}\,\omega_i < k\omega^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}.$$

Il suit de la que, quelque soit un nombre positif ε, on peut trouver un nombre η tel, que

$$\text{si } \omega < \eta, \text{ on a } \sum_{i=1}^{i=p} |u(\omega_i)|\,\omega_i < \varepsilon.$$

Comme cas particulier signalons, que la fonction moyenne additive $u(\omega)$ est absolument continue, si elle est bornée, c'est-à-dire, si on a pour chaque (ω)

$$|u(\omega)| < k.$$

Exemple. Etant donné un ensemble mesurable (M), désignons par (ωM) la portion de (M) continue dans le domaine (ω). La fonction moyenne

$$\frac{|\omega M|}{\omega}$$

est absolument continue, ses valeurs ne surpassant pas l'unité.

Si la fonction moyenne $u(\omega)$ est absolument continue et si on forme suivant les règles du § 6 la fonction généralisée des ensembles $u\,(M)$, on trouve pour le nombre

$$u(M)\,|M| \tag{29}$$

la valeur zéro, si la mesure de (M) est égale à zéro.

En effet, quelque soit le nombre positif η, on peut couvrir l'ensemble (M) par un ensemble dénombrable des intervalles (i_k) tels que

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n + \cdots < \eta.$$

En choisissant le nombre N de manière que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} i_k < \frac{\eta}{2}, \quad n \geqq N$$

on trouve, que la mesure de la somme des domaines

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

est moindre que $\frac{\eta}{2}$. Il suit de là, que

$$\sum_{k=1}^{k=n} u(i_k)\, i_k < \varepsilon, \quad n \geqq N$$

d'où l'on conclut, qu'on a aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u(i_k)\, i_k \leqq \varepsilon.$$

8. Formons suivant la règle du § 1 une suite infinie des réseaux des intervalles, contenant (D_x).

Prenons un point (x) du domaine (D_x).

Ayant pris le réseau avec l'indice ν, envisageons l'intervalle (i_ν) contenant (x) dans son intérieur, en désignant par (i_ν) un groupe d'intervalles du réseau, formant un intervalle plus étendu, si le point (x) est sur la frontière d'un des intervalles du réseau.*

Envisageons en premier lieu les domaines (ω) contenus dans (i_ν) tels que

$$\frac{\omega}{i_\nu} \geqq \alpha. \tag{29}$$

Désignons par $\overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$ la borne supérieure des $u(\omega)$ pour tous les domaines (ω) répondant à l'inégalité (29); posons

$$\overline{u_\alpha(x)} = \overline{\lim}\, \overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}, \quad \nu \rightarrow \infty$$

et, en remarquant, que $\overline{u_\alpha(x)}$ croît, quand α diminue,

$$\bar{u}(x) = \lim \overline{u_\alpha(x)}, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Nous définissons de la même manière les nombres

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)},\ \underline{u_\alpha(x)},\ \underline{u}(x)$$

en prenant partout les limites inférieures.

Définition 5. Si on a

$$\bar{u}(x) = \underline{u}(x)$$

on dit que la fonction moyenne $u(\omega)$ a une valeur

$$u(x) = \bar{u}(x) = \underline{u}(x) \tag{30}$$

au point (x).

Exemple. La fonction moyenne de l'exemple (1) du § 1 a presque partout une valeur égale à $f(x)$.

Faisons quelques remarques à propos de la définition posée.

On a toujours

$$\underline{u}(x) \leqq \underline{u_\alpha(x)} \leqq \overline{u_\alpha(x)} \leqq \bar{u}(x).$$

---

* Voir L. Schlesinger und Plessner. Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, p. 113.

Ainsi, si l'égalité (30) est satisfaite, on a aussi

$$u(x) = \underline{u_\alpha(x)} = \overline{u_\alpha(x)}.$$

Si au point (x) la fonction moyenne $u(\omega)$ a une valeur et si les domaines de la suite

(31) $$(\omega_1), (\omega_2), \ldots (\omega_n) \ldots \ldots ,$$

qui sont contenus dans les intervalles de la suite des réseaux en répondant à la même inégalité (29), tendent vers zéro, on a

$$u(x) = \lim u(\omega_n), \quad n \to \infty.$$

En effet, pour chaque (ω_n) est valable l'inégalité

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} \leqq u(\omega_n) \leqq \overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)},$$

qui montre que

$$\overline{\lim}\, u(\omega_n) \leqq \overline{\lim}\, \overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} = u(x)$$
$$\underline{\lim}\, u(\omega_n) \geqq \underline{\lim}\, \underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} = u(x).$$

Si la fonction moyenne $u(\omega)$ est continue et si l'on forme suivant la règle du § 6 une fonction des ensembles $u(M)$, appartenants à un corps (A), on peut étendre la définition donnée sur la fonction $u(M)$, en prenant au lieu du domaine (ω), contenu dans (i_ν), les ensembles (M), y contenus, en les assujettissant à la restriction

(29) $$\frac{|M|}{i_\nu} \geqq \alpha.$$

Comme les domaines (ω) entrent dans le corps (A), il est évident, que dans tous les points, où la fonction $u(M)$ a une valeur, la fonction $u(\omega)$ l'a aussi et que ces valeurs sont égales.

Remarquons encore que les fonctions des points $\overline{u}(x)$ et $\underline{u}(x)$ sont mesurables. Pour le démontrer il suffit d'observer que pour ν et α fixes les fonctions des points

$$\overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)},\ \underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$$

comme ayant un nombre limité des valeurs dans (D_x) sont mesurables. Il suit de là que les fonctions $\overline{u(x)}$, $\underline{u(x)}$ le sont aussi comme les limites des suites des fonctions mesurables.

9. *Théorème.* Une fonction additive et à variation bornée a presque partout une valeur.

Pour le démontrer, remarquons que si

$$u(\omega) = u_1(\omega) - u_2(\omega)$$

$u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ ayant leurs valeurs positives, on a

$$\bar{u}(x) \leqq \overline{u_1(x)} - \underline{u_2}(x)$$
$$\underline{u}(x) \geqq \underline{u_1(x)} - \bar{u}_2(x),$$

car on a évidemment

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} < \overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}.$$

Il suit de là, qu'il suffit de démontrer le théorème pour les fonctions moyennes, ayant toutes leurs valeurs positives: si les inégalités

$$\bar{u}_1(x) > \underline{u_1}(x), \quad \bar{u}_2(x) > \underline{u_2}(x)$$

peuvent être satisfaites seulement pour les ensembles de mesure nulle, l'inégalité

$$\bar{u}(x) > \underline{u}(x)$$

l'est aussi seulement pour les pareils ensembles.

Supposons, par conséquant, que toutes les valeurs de $u(\omega)$ soient positives.

Nous démontrerons plus loin que l'ensemble des points où on a

$$\underline{u}(x) = \infty$$

est de mesure nulle. En excluant ces points, supposons que l'inégalité

$$\bar{u}(x) - \underline{u}(x) > 0$$

soit satisfaite pour un ensemble (E) des points, ayant la mesure positive.*

---

* L'ensemble (E') est mesurable, car la fonction $\bar{u}(x) - \underline{u}(x)$ est mesurable étant égale à la différence entre deux fonctions mesurables $\bar{u}(x)$ et $\underline{u}(x)$.

Décomposons l'ensemble (E) en ensembles partielles (E_0), (E_1) . . . . . . en supposant que (E_n) soit l'ensemble des points dans lesquels

$$\frac{1}{10^{n-1}} \geq \bar{u}(x) - \underline{u}(x) > \frac{1}{10^n},$$

(E_0) étant l'ensemble, où

$$\bar{u}(x) - u(x) > 1.$$

Comme on a

$$|E| = |E_0| + |E_1| + \cdots$$

la mesure de l'un de ces ensembles doit être positive. Il existe donc un nombre $2a$, tel que l'inégalité

$$\bar{u}(x) - \underline{u}(x) > 2a$$

est satisfaite par un ensemble (e) de mesure positive.

Divisons l'ensemble (e) en ensembles partiels (e_0), (e_1) . . . en choisissant pour (e_k) l'ensemble des points dans lesquels

$$ka \leq \underline{u}(x) < (k+1)a.$$

Comme on a

$$|e| = |e_0| + |e_1| + \cdots\cdots,$$

la mesure d'un des ensembles (e_0), (e_1), ... est positive. Supposons que c'est l'ensemble (e_k). Pour tous les points de cet ensèmble on a

$$\underline{u}(x) < (k+1)a, \; \bar{u}(x) > \underline{u}(x) + 2a > (k+2)a.$$

Posons

$$(k+1)a < \varkappa < \varkappa_1 < \lambda_1 < \lambda < (k+2)a.$$

On peut maintenant affirmer, que la mesure de l'ensemble (M) des points, pour lesquels

$$\underline{u}(x) < \varkappa < \varkappa_1 < \lambda_1 < \lambda < \bar{u}(x),$$

est positive. Comme la mesure $|M|$ de l'ensemble (M) est positive, il existe dans cet ensemble un point (x) dans lequel la densité est égale à 1,

la densité au point (x) étant la valeur au point (x) de la fonction absolument continue

$$\frac{|\omega M|}{\omega} = \delta(\omega), \tag{32}$$

cette valeur étant égale à 1 presque partout.*

Comme $\underline{u}\,(x)$ est plus petite que $\varkappa$ et comme

$$\underline{u}\,(x) = \lim \underline{u_\alpha(x)}, \text{ si } \alpha < \alpha_0 \colon \underline{u_\alpha(x)} < \varkappa + \frac{\varepsilon}{2},$$

en prenant pour ε un nombre moindre que $\varkappa_1 - \varkappa$.

Il suit de là, qu'il existe une infinité de $\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$ qui justifient l'inégalité

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} < \underline{u_\alpha(x)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varkappa + \varepsilon < \varkappa_1.$$

On conclut de là, qu'on peut assigner une infinité des domaines

$$(\omega_1),\ (\omega_2) \ldots\ldots (\omega_n) \ldots\ldots \tag{33}$$

tels que

$$u(\omega_n) < \varkappa_1,\ u(\omega_n)\,\omega_n < \varkappa_1\,\omega_n.$$

Comme les domaines (33) répondent aux conditions imposées par le § 8 aux domaines (31), la suite

$$\delta(\omega_1),\ \delta(\omega_2) \ldots\ldots,\ \delta(\omega_n) \ldots\ldots$$

a une limite égale à l'unité.

Inscrivons dans chaque domaine (ω_n) un nouveau domaine $(\bar{\omega}_n)$ n'ayant pas de points sur la frontière (ω_n) et tel que

$$\bar{\omega}_n = \omega_n (1 - \varepsilon_1),$$

ε_1 étant un nombre positif choisi d'avance.

La suite des domaines

$$(\bar{\omega}_1),\ (\bar{\omega}_2), \ldots\ldots (\bar{\omega}_n), \ldots\ldots \tag{33'}$$

* Voir, par exemple, L. Schlesinger und Plessner, l. c., p. 123.

répond aussi aux conditions imposées aux domaines (33) et la suite

$$\delta(\overline{\omega}_1),\ \delta(\overline{\omega}_2), \ldots\ \delta(\overline{\omega}_n) \ldots$$

a une limite égale à l'unité.

Cela étant, on peut trouver un nombre n, tel que

$$\delta(\omega_n) > 1 - \varepsilon_2, \quad \delta(\overline{\omega}_n) > 1 - \varepsilon_2,$$

ε_2 étant un nombre choisi d'avance après le choix de ε_1.

Pour simplifier, désignons (ω_n) simplement par (ω). On a

$$(34)\quad u(\omega)\omega < \varkappa_1\omega,\ \delta(\omega)\omega > \omega(1-\varepsilon_2),\ \delta(\overline{\omega})\overline{\omega} > (1-\varepsilon_2)\overline{\omega},\ \overline{\omega} = \omega(1-\varepsilon_1)$$

et

$$\delta(\omega)\omega = |\omega M|, \quad \delta(\overline{\omega})\overline{\omega} = |\overline{\omega} M|.$$

Les formules (34) montrent, que la mesure de l'ensemble $(\overline{\omega}M)$ est positive.

Pour chaque point (x) de l'ensemble $(\overline{\omega}M)$ nous avons

$$\overline{u}(x) > \lambda.$$

En choisissant un point (x) de $(\overline{\omega}M)$, on peut affirmer, que

$$\text{si } \alpha < \alpha_1: \qquad \overline{u_\alpha(x)} > \lambda - \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant positif et moindre que $\lambda - \lambda_1$ Il suit de là, que pour une infinité de $\overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$ on a

$$\overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} > \overline{u_\alpha(x)} - \frac{\varepsilon}{2} > \lambda - \varepsilon > \lambda_1$$

et que, quelque soit (x) dans $(\overline{\omega}M)$, les inégalités

$$(35) \qquad u(\omega_n) > \lambda_1$$

pour une infinité de domaines sont satisfaites.

Les domaines (ω_n) correspondant à un point (x) situé dans $(\overline{\omega})$, on peut se contenter de ceux, qui sont contenus dans (ω), leur nombre restant infini.

En résumant, nous avons fait correspondre à chaque point (x) de l'ensemble $(\bar{\omega} M)$ une suite infinie des domaines (ω_n), contenue dans (ω).

En appliquant maintenant le théorème de Vitali* on voit, que parmi ces domaines on peut choisir un nombre infini de domaines (τ_n), tels que

$$|(\bar{\omega} M) - (\bar{\omega} M) \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n| = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < |\bar{\omega} M| + \varepsilon_3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n > |\bar{\omega} M|$$

et que les domaines (τ_n) n'ont pas des points intérieurs communs. Pour chacun de ces domaines on a l'inégalité

$$u(\tau_n)\tau_n > \lambda_1 \tau_n$$

d'òu suit qu'on a

$$\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \sum_{n=1}^{\infty} u(\tau_n)\tau_n < u(\omega)\omega,$$

tous les domaines (τ_n) étant contenus dans (ω). Or, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \geqq |\bar{\omega} M| > (1 - \varepsilon_2)\bar{\omega} = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)\omega.$$

On peut évidemment choisir les nombres ε_1 et ε_2 d'avance de manière qu'on ait

$$\lambda_1 (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)\omega > \varkappa_1 \omega \text{ ou } (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) > \frac{\varkappa_1}{\lambda_1}$$

ce qui conduit à une inégalité contradictoire.

$$u(\omega)\omega < \varkappa_1 \omega < u(\omega)\omega.$$

Il suit de là que la mesure de l'ensemble (M) doit être égale à zero.

En appliquant les mêmes raisonnements on peut démontrer également, que l'ensemble (M_∞) des points, où on a

$$\underline{u}(x) = +\infty,$$

a la mesure nulle.

---

* Voir L. Schlesinger und Plessner, l. c., pp. 116—119.

Si la mesure extérieure de cet ensemble était positive, la mesure extérieure de l'ensemble (M_p), où on a

$$\underline{u}(x) \geqq p + 1 \tag{36}$$

serait aussi positive. L'inégalité (36) étant satisfaite, on a pour les α moindres qu'un α_0, (x) appartenant à (M_p),

$$\underline{u_\alpha(x)} > p + \frac{1}{2}$$

d'où suit que pour tous les ν supérieurs à un certain N, on a

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} > p$$

et que pour une infinité de domaines l'inégalité

$$p\,\omega_n < u(\omega_n)\,\omega_n$$

est satisfaite. En appliquant maintenant le théorème de Vitali, on voit que pour certains domaines (τ_n), tels que

$$|(M_p) - (M_p)\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n|_e = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < |M_p|_e + \varepsilon, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \geqq |M_p|_e \geqq |M_\infty|_e$$

on a, la fonction $u(\omega)$ étant additive,

$$p\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \sum_{n=1}^{\infty} u(\tau_n)\,\tau_n < u(D_x)\,D_x, \quad p\,|M_\infty| < u(D_x)\,D_x$$

ce qui donne inégalité impossible, si (M_∞) n'est pas égale à zéro, le nombre p étant arbitraire.

10. Supposons maintenant que $u(\omega)$ est continue. Nous pouvons compléter les raisonnements du § 6 en démontrant le *théoréme:* Soit donné un ensemble (M) ayant la mesure nulle. Si pour chaque point (x) de l'ensemble (M)

$$u(x) < l \tag{37}$$

on a

$$u(M)\,|M| = 0. \tag{38}$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'en passant d'un réseau de la suite des réseaux du § 1 au suivant, on divise les arètes des intervalles en deux parties.

La mesure de l'ensemble (M) étant nulle, on peut le couvrir par un ensemble dénombrable des intervalles (i_n), appartenant à notre suite des réseaux tels que

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n + \cdots < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif choisi d'avance, chaque point de (M) étant à l'intérieur d'un des intervalles mentionnés; les intervalles pouvant avoir des points communs intérieurs.

Formons une suite dénombrable des suites des réseaux d'intervalles en partant des intervalles (i_1), (i_2), $\ldots (i_n) \ldots$ comme premiers termes de chaque suite.

Prenons un intervalles (i_n) et envisageons les points de (M) qui sont dans l'intérieur de (i_n). Si (x) est un tel point, il suit de l'inégalité (37) que

$$\text{si } \alpha \leqq \alpha_0: \qquad \overline{u_\alpha(x)} < l + 1$$

ce qui montre que

$$\text{si } \nu > N: \qquad \overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} < l + 2.$$

On peut supposer que N est assez grand pour que l'intervalle $(i_\nu^{(n)})$ soit contenu dans (i_n). Comme $\overline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$ est la borne supérieure des $u\ (\omega)$ dans lesquelles

$$\frac{\omega}{i_\nu^{(n)}} \geqq \alpha \tag{39}$$

et comme l'inégalité (39) est satisfaite pour $(i_\nu^{(n)})$ lui-même, on a

$$u(i_\nu^{(n)}) < l + 2. \tag{40}$$

Désignons temporairement par $(\underline{i_n M})$ l'ensemble des points de (M) qui sont à l'intérieur de (i_n). Ainsi à chaque point (x) de $(\underline{i_n M})$ on peut faire correspondre un intervalle $(i_\nu^{(n)})$ (ou une aggrégation d'intervalles, con-

tenant au plus 2^k intervalles, k étant la dimension de (D_x), apartenant à (i_n)), tel que l'inégalité (40) soit satisfaite et qui contient (x) dans son intérieur.

On peut choisir parmi ces intervalles un ensemble dénombrable, qui couvre l'ensemble $(i_n M)$. On peut supposer* que ces intervalles n'ont pas des points intérieurs communs, mais comme les domaines $(i_\nu^{(n)})$, correspondant aux points (x), situés sur les frontières des intervalles, sont composés de plusieurs intervalles, il sera mieux de conserver ces domaines. En tout cas, on aura

$$\Sigma i_\nu^{(n)} < i_n 2^k$$

Il suit de là, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Sigma u(i_\nu^{(n)}) i_\nu^{(n)} < (l+2) 2^k \sum_{t=1}^{\infty} i_n < (l+2) 2^k \varepsilon.$$

Comme $u(M) |M|$ est la borne inférieure de toutes les sommes possibles

$$\Sigma u(i_n) i_n,$$

les intervalles (i_1) (i_2) .... couvrant (M), on voit que $u(M) |M|$ est égale à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Il suit du théorème démontré, que chaque ensemble de mesure nulle, vérifiant les conditions du théorème, appartient au corps (A).

Nous avons désigné par (M_∞) l'ensemble des points, dans lesquels on a

$$\underline{u}(x) = +\infty;$$

la mesure de (M_∞) est nulle; on peut démontrer, que l'ensemble (M_∞) appartient au corps (A).

Désignons par (M_n) l'ensemble des points, pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leq \underline{u}(x) < l_n.$$

Envisageons l'ensemble $(D_x - M_\infty)$ des points de (D_x) n'appartenant pas à (M_∞). On a

$$(D_x - M_\infty) = (M_1) + (M_2) + \cdots,$$

* Voir, par exemple, L. Schlesinger und Plessner, l. c., p. 33.

une suite des nombres

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots \qquad l_n \to \infty$$

étant donnée.

Les ensembles (M_n) appartiennent évidemment au corps (A), étant les limites des ensembles pareils pour les fonctions $\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}$; ces derniers ensembles sont composés des intervalles et des ensembles à mesure nulle, qui répondent à la condition du théorème. Il suit de là, que l'ensemble $(D_x - M_\infty)$ appartient au corps (A) et, simultanément, l'ensemble (M_∞).

On peut maintenant généraliser le théorème en démontrant qu'on a toujours

$$u(M)\,|M| = 0,$$

si l'ensemble (M) à mesure nulle n'a pas des points communs avec (M_∞). Soit (M) un tel ensemble. On a évidemment

$$(M) = (MM_1) + (MM_2) + \cdots$$

et

$$u(M)|M| \leqq u(MM_1)|MM_1| + u(MM_2)|MM_2| + \cdots$$

mais comme on a pour chaque n:

$$u(MM_n)|MM_n| = 0,$$

la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} u(MM_i)|MM_i|$$

est égale à zéro pour chaque n et a une limite égale à zéro.

11. Nous sommes maintenant en état de démontrer le théorème suivant.

Théorème. Si (M) est un ensemble de points, dans lesquels

$$k \leqq \underline{u}(x) < l, \tag{41}$$

la fonction continue $u(\omega)$ ayant toujours toutes ses valeurs positives, on a

$$k|M| \leqq u(M)|M| \leqq l|M|. \tag{42}$$

L'ensemble (M) ne contient pas les points, appartenants à (M_∞).

Si la mesure de (M) est nulle, l'inégalité (41) est évidente, car dans ce cas on a, suivant le théorème généralisé du § 10,

$$0 = k\,|M| = u(M)\,|M| = l\,|M|.$$

Supposons donc que la mesure de (M) est positive. Comme

$$\underline{u}(x) = \lim \underline{u_\alpha(x)}, \qquad \alpha \to 0$$

on a pour chaque nombre positif ε_1:

$$\text{si } \alpha < \alpha_0: \qquad k < \underline{u_\alpha}(x) < l + \varepsilon_1.$$

Choisissons un nombre α moindre que α_0. Comme

$$\underline{u_\alpha(x)} = \lim \underline{u_\alpha^{(\nu)}}(x), \qquad \nu \to \infty$$

quelque soit le nombre positif ε_2, il y a une infinité des ν tels que

$$\underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} < l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

et

$$\text{si } \nu > N_0: \qquad k - \varepsilon_2 < \underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)}.$$

Si ν est un de ces nombres, quelque soit le nombre positif ε_3, il existe un domaine ω contenu dans (i_ν) répondant à l'inégalité

$$\frac{\omega}{i_\nu} \geqq \alpha$$

et tel que

$$k - \varepsilon_2 < \underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} \leqq u(\omega) < \underline{u_\alpha^{(\nu)}(x)} + \varepsilon_3 < l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

On peut par conséquent former pour chaque point (x) de (M) une suite infinie des domaines (ω_1), $(\omega_2) \ldots (\omega_n) \ldots$, tels que

(43) $$k - \varepsilon_2 < u(\omega_n) < l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Or, la mesure de l'ensemble (M) étant positive, quelque soit le nombre positif δ_m on peut choisir parmi les divers (ω_n) un ensemble dénombrable des domaines

$$(\tau_1^{(m)}), (\tau_2^{(m)}), \ldots (\tau_n^{(m)}), \ldots$$

tel que:

1) il n'a pas de points communs intérieurs

2) $$|M - M\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{(m)}| = 0$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{(m)} < |M| + \delta_m,$$

l'inégalité (43) étant satisfaite pour chaque domaine $(\tau_n^{(m)})$, ainsi que

(43') $$(k - \varepsilon_2)\tau_n^{(m)} < u(\tau_n^{(m)})\tau_n^{(m)} < (l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\tau_n^{(m)}.$$

Posons pour abréger

$$g_m = \sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{(m)}, \qquad h_m = \sum_{n=1}^{\infty}u(\tau_n^{(m)})\tau_n^{(m)}$$

Il suit de (43') qu'on a

(44) $$(k - \varepsilon_2)g_m < h_m < (l + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)g_m.$$

Supposons, que δ_m tend vers zéro, si $m \to \infty$, de manière, que la série

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m + \cdots$$

reste convergente.

L'ensemble (Mg_m) ne contient pas les points appartenants à (M_∞).

Comme les ensembles

$$(M) \text{ et } (Mg_m)$$

diffèrent par un ensemble de mesure nulle, ne contenant pas les points appartenants à (M_∞), on a

$$u(M)|M| = u(Mg_m)|Mg_m|.$$

Formons la série

$$(g_1 - Mg_1) - (g_2 - Mg_2) + (g_2 - Mg_2) - (g_3 - Mg_3) +$$
$$+ (g_2 - Mg_3) - (g_4 - Mg_4) + \cdots$$

qui est convergente, car

$$|g_m - Mg_m| < \delta_m,$$

et qui a pour somme

$$(g_1 - Mg_1).$$

On a ainsi

$$u(g_1 - Mg_1)\,|g_1 - Mg_1| = u(g_1)\,|g_1| - u(Mg_1)\,|Mg_1| = u(g_1)\,|g_1| - u(M)\,|M| =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} u\,(g_m - g_{m+1} - (Mg_m - Mg_{m+1}))\,|g_m - g_{m+1} - (Mg_m - Mg_{m+1})|.$$

Nous avons ainsi:

$$u(g_1)\,|g_1| - u(M)\,|M| =$$

$$= \lim \sum_{u=1}^{n} u\,(g_m - g_{m+1} - (Mg_m - Mg_{m+1}))\,|g_m - g_m - (Mg_m - Mg_{m+1})| =$$

$$= \lim \sum_{m=1}^{n} u\,(g_m - g_{m+1})\,|g_m - g_{m+1}| - u\,(Mg_m - Mg_{m+1})\,|Mg_m - Mg_{m+1}| =$$

$$= \lim \sum_{m=1}^{n} u\,(g_m - g_{m+1})\,|g_m - g_{m+1}| =$$

$$= \lim \sum_{u=1}^{n} u\,(g_m)\,|g_m| - u\,(g_{m+1})\,|g_{m+1}| = u\,(g_1)\,|g_1| - \lim u\,(g_n)\,|g_n|,$$

car les ensembles (Mg_m), (Mg_{m+1}) diffèrent de l'ensemble (M) par des ensembles à mesure nulle, ne contenant pas les points de (M_∞); on en conclut, que

$$(Mg_m - Mg_{m+1})$$

est un ensemble de mesure nulle, ne contenant pas les points de (M_∞), d'où suit

$$u\,(Mg_m - Mg_{m+1})\,|Mg_m - Mg_{m+1}| = 0.$$

Ainsi on a

$$\lim u\,(g_n)\,|g_n| = \lim h_n = u\,(M)\,|M|$$

et quelque soit le nombre positif ε_4

$$\text{si } n > N_0\text{:} \quad u(M)\,|M| - \varepsilon_4 < h_n < u\,(M)\,|M| + \varepsilon_4.$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité (44), on trouve en premier lieu ayant choisi le nombre m convenablement

$$(45) \qquad (k-\varepsilon_2)g_m - \varepsilon_4 < u(M)|M| < (l+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)g_m + \varepsilon_4.$$

Or, comme on a

$$|M| \leqq g_m < |M| + \delta_m$$

la dernière inégalité donne

$$(k-\varepsilon_2)|M| - \varepsilon_4 < u(M)|M| < (l+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)(|M|+\delta_m)+\varepsilon_4.$$

Comme on peut choisir les nombres ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, δ_m aussi petits qu'on voudra, il suit qu'on a

$$k|M| \leqq u(M)|M| \leqq l|M|$$

ce qu'il fallait démontrer.

12. Prenons maintenant un domaine (ω) et formons l'ensemble $(\omega - \omega M_\infty)$ ne contenant pas les points appartenants à (M_∞).

En désignant toujours par (M_n) l'ensemble des points, pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leqq \underline{u(x)} < l_n$$

nous aurons

$$(\omega - \omega M_\infty) = (\omega M_1) + \cdots + (\omega M_n) + \cdots$$

et

$$u(\omega)\,\omega = u(\omega M_\infty)|\omega M_\infty| + \sum_{n=1}^{\infty} u(\omega M_n)|\omega M_n|,$$

tous les ensembles appartenant au corps (A).

Or, suivant le théorème du § 11 on a

$$(46) \qquad l_{n-1}|\omega M_n| \leqq u(\omega M_n)|\omega M_n| \leqq l_n|\omega M_n|$$

d'où suit que la suite

$$(47) \qquad l_1|\omega M_2| + l_2|\omega M_3| + \cdots$$

est convergente.

Désignons maintenant par $(\overline{M}_n)$ l'ensemble des points, pour lesquels on a

$$l_{n-1} < \underline{u}(x) \leqq l_n,$$

par (μ_n) l'ensemble des points pour lesquels on a,

$$\underline{u}(x) = l_n$$

et par $(\tilde{M}_n)$ l'ensemble des points pour lesquels

$$l_{n-1} < \underline{u}(x) < l_n.$$

On a évidemment

(48) $$(M_n) = (\tilde{M}_n) + (\mu_{n-1}), (\overline{M}_n) = (\tilde{M}_n) + (\mu_n).$$

Formons la série

(49) $$l_1 |\omega \overline{M}_1| + l_2 |\omega \overline{M}_2| + \cdots.$$

Comme on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \overline{M}_n| - \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega M_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \tilde{M}_n| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \mu_n| - \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \tilde{M}_{n+1}| - \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \mu_n| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} l_n |\omega \tilde{M}_n| - \sum_{n=2}^{\infty} l_{n-1} |\omega \tilde{M}_n| = l_1 |\omega \tilde{M}_1| +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (l_n - l_{n-1}) |\omega \tilde{M}_n|$$

et comme la somme

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\omega \tilde{M}_n|$$

est bornée, étant plus petite que ω, on voit que pour l_1 et $l_n - l_{n-1}$ moindres que ε la différence entre les sommes (49) et (47) est plus petite que $\varepsilon\dot{\omega}$.

En utilisant les égalités (48) on trouve

$$\sum_{n=1}^{n} (\omega\, M_n) = (\omega\, \mu_0) - (\omega\, \mu_n) + \sum_{1}^{n} (\omega\, \overline{M}_n),$$

d'où il suit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(\omega\, M_n)\, |\omega\, M_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u(\omega\, \overline{M}_n)\, |\omega\, \overline{M}_n|,$$

car

$$\lim\ u(\omega\, \mu_n)\, |\omega\, \mu_n| = 0,\ u\,(\omega\mu_0)\, |\omega\mu_0| = 0.$$

En effet, on a

$$(\omega\, \mu_n) = (\omega\, M_{n+1}) + (\omega\, M_{n+2}) + \cdots - ((\omega\, \overline{M}_{n+1}) + (\omega\, \overline{M}_{n+2}) + \cdots),$$

d'où

$$u(\omega\, \mu_n)\, |\omega\, \mu_n| = \sum_{i=n+1}^{\infty} u(\omega\, M_n)\, |\omega\, M_n| - \sum_{i=n+1}^{\infty} u(\omega\, \overline{M}_n)\, |\omega\, \overline{M}_n|,$$

les séries dans la partie droite étant convergentes; quand à $u(\omega\, \mu_0)\, |\omega\, \mu_0|$, elle est plus petite que $u\,(\omega\, M_1)\, |\omega\, M_1|$, qui tend vers zéro avec l_1, suivant (46).

En utilisant de nouveau l'inégalité du § 11 on a

$$l_{n-1}\, |\omega\, \overline{M}_n| \leqq u(\omega\, \overline{M}_n)\, |\omega\, \overline{M}_n| \leqq l_n\, |\omega\, \overline{M}_n|, \tag{50}$$

d'où suit

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_{n-1}\, |\omega\, M_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} u(\omega\, M_n)\, |\omega\, M_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} l_n\, |\omega\, \overline{M}_n|.$$

On conclut de là, que la fonction $\underline{u}\,(x)$ est intégrable et qu'on a

$$\int_{(\omega)} \underline{u}\,(x)\, d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} u(\omega\, M_n)\, |\omega\, M_n| = u(\omega)\, \omega - u(\omega\, M_\infty)\, |\omega\, M_\infty|. \tag{51}$$

Introduisons maintenant la fonction moyenne:

$$s\,(\omega) = \frac{u\,(\omega\, M_\infty)\, |\omega\, M_\infty|}{\omega}.$$

L'égalité (51) prend la forme

$$u(\omega) = s(\omega) + \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} \underline{u}(x)\, d\omega .$$

On voit que la fonction $s(\omega)$ est continue; comme les valeurs de la fonction

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} \underline{u}(x)\, d\omega$$

sont presque partout égales à $\underline{u}(x)$, qui est presque partout égale à $u(x)$, les valeurs de $s(\omega)$ sont presque partout égales à zéro.

La fonction moyenne additive et à vàriation bornée $s(\omega)$ est dite la partie singulière de la fonction continue $u(\omega)$.

13. Revenons maintenant à la fonction moyenne additive et à variation bornée $u(\omega)$ tout à fait générale. Supposons, comme toujours, que toutes les valeurs de $u(\omega)$ sont positives.

Nous avons démontré au § 5 qu'une fonction additive et à variation bornée et ayant les valeurs positives peut être transformée en une somme

$$u(\omega) = l(\omega) + L(\omega)$$

où $l(\omega)$ est continue et $L(\omega)$ — la fonction des sauts — est la borne supérieure des sommes

$$\left(u(\omega_1) - u(\omega_1)\right)\omega_1 + \cdots + \left(u(\omega_n) - \underline{u}(\omega_n)\right)\omega_n,$$

$(\omega_1) \ldots . (\omega_n)$ étant les portions de (ω).

Théorème. Les valeurs de la fonction des sauts $L(\omega)$ sont presques partout égales à zéro.

Pour démontrer le théorème il suffit de répéter textuellement les raisonnements du grand mémoire de M. H. Lebesgue. *

La démonstration repose sur deux lemmes suivants.

Lemme 1. Si la différence

$$u(\omega)\,\omega - \vartheta(\omega)\,\omega$$

* Annales de l'Ecole Normale, 1911.

est continue, les valeurs de la fonction moyenne additive $\vartheta(\omega)$ n'étant pas négatives, on a

$$L(\omega) \leqq \vartheta(\omega).$$

En effet, comme

$$\big(u(\omega)-\vartheta(\omega)\big)\,\omega-\big(\underline{u(\omega)-\vartheta(\omega)}\big)\,\omega=\big(u(\omega)-\underline{u}(\omega)\big)\,\omega-\big(\vartheta(\omega)-\underline{\vartheta}(\omega)\big)\,\omega=0$$

on a

$$\big(u(\omega_1)-\underline{u}(\omega_1)\big)+\cdots+\big(u(\omega_n)-\underline{u}(\omega_n)\big)\,\omega_n=$$
$$=\big(\vartheta(\omega_1)-\underline{\vartheta}(\omega_1)\big)\,\omega_1+\cdots+\big(\vartheta(\omega_n)-\underline{\vartheta}(\omega_n)\big)\,\omega_n\leqq\vartheta(\omega)\,\omega,$$

$(\omega_1) \ldots . (\omega_n)$ étant les portions, en lesquelles est divisé (ω).

Si on choisit ces dernières convenablement, on trouve

$$L(\omega)\,\omega-\varepsilon<\sum_{i=1}^{i=n}\big(u(\omega_i)-\underline{u}(\omega_i)\big)\,\omega_i\leqq\vartheta(\omega)\,\omega$$

d'où suit l'inégalité énoncée.

Lemme 2. Si la fonction moyenne additive $A(\omega)$, dont les valeurs sont positives, est continue, il existe un domaine (ω_0) pour lequel on a

$$L(\omega_0)<A(\omega_0).$$

Effectivement, si pour chaque domaine (ω_0) on avait

$$0<A(\omega_0)\leqq L(\omega_0),$$

pour chaque domaine (ω)

$$\vartheta(\omega)=L(\omega)-A(\omega)$$

n'est pas négative. Comme $l(\omega)$ et $A(\omega)$ sont continues, la différence

$$u(\omega)-\vartheta(\omega)=u(\omega)-L(\omega)+A(\omega)=l(\omega)+A(\omega)$$

est continue. Il suit de là que

$$L(\omega)\leqq\vartheta(\omega)=L(\omega)-A(\omega)$$

ce qui est impossible, $A(\omega)$ étant positif.

Pour démontrer maintenant que les valeurs de $L(\omega)$ sont presque partout égales à zéro, supposons, qu'il existe un ensemble (E) de mesure positive dans lequel $\overline{L(x)}$ sont plus grandes que zéro.

En répétant les raisonnements du § 9 et en mettant la fonction $\overline{L(x)}$ à la place de $\overline{u}(x) - \underline{u}(x)$ on s'assure aisément qu'il existe un ensemble (E) de mesure positive, tel qu'on a pour ses points

$$\overline{L}(x) > \lambda > \lambda_1 > 0.$$

Prenons un des domaines (ω) et un domaine $(\overline{\omega})$ contenu dans (ω) et répétons les raisonnements du § 9 en mettant $\overline{L}(x)$ à la place de $\overline{u}(x)$ et l'ensemble $(\overline{\omega}\,\mathrm{E})$ à la place de $(\overline{\omega}\,M)$; nous trouverons que pour chaque (x) appartenant à $(\overline{\omega}\,\mathrm{E})$ on peut poser pour une infinité de domaines les inégalités

$$L(\omega_n) > \lambda_1,$$

les domaines (ω_n) étant contenus dans (ω).

L'application du théorème de Vitali permet de choisir parmi eux un ensemble dénombrable des domaines (τ_n) tels que

$$\left|(\overline{\omega}\,\mathrm{E}) - (\overline{\omega}\,\mathrm{E}) \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n\right| = 0, \quad |\overline{\omega}\,\mathrm{E}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < |\overline{\omega}\,\mathrm{E}| + \varepsilon_3$$

et que les domaines (τ_n) n'aient pas des points intérieurs communs.

Pour chacun de ces domaines on a l'inégalité

$$L(\tau_n)\,\tau_n > \lambda_1\,\tau_n$$

d'où il suit qu'on a

$$\lambda_1 |\overline{\omega}\,\mathrm{E}| < \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \sum_{n=1}^{\infty} L(\tau_n)\,\tau_n \leqq L(\omega)\,\omega$$

et

$$\lambda_1 |\omega\,\mathrm{E}| \leqq L(\omega)\,\omega, \qquad \lambda_1 \frac{|\omega\,\mathrm{E}|}{\omega} \leqq L(\omega).$$

Or, la fonction moyenne

$$\lambda \frac{|\omega\,\mathrm{E}|}{\omega}$$

étant continue (et même absolument), le résultat obtenu est en contradiction avec le lemme (2).

En combinant les résultats obtenus avec les résultats du § 12 et en les appliquant aux parties positive et négative d'une fonction arbitraire $u(\omega)$ on voit, que chaque fonction $u(\omega)$ moyenne, additive et à variation bornée peut être mise sous la forme

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} \underline{l}(x)\, d\omega + s(\omega) + L(\omega),$$

$s(\omega)$ étant la partie singulière de $l(\omega)$, ou plus simplement sous la forme

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} F(x)\, d\omega + w(\omega) = v(\omega) + w(\omega)$$

$F(x)$ étant une fonction sommable et les valeurs de $w(\omega)$ étant presque partout égales à zéro.

Comme les valeurs de

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} F(x)\, d\omega$$

sont presque partout égales à $F(x)$, les valeurs de $u(\omega)$ sont presque partout égales à $F(x)$.

CHAPITRE 2

Les intégrales de Stieltjes

1. Supposons, que $f(x)$ est une fonction des points (x) du domaine (D_x). Soit (Ω) une portion de (D_x) et supposons que (Ω) est décomposée en n domaines $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$.

Formons la somme

$$I_n = \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) f(\xi_i)\, \omega_i \tag{1}$$

$u(\omega)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée et (ξ_i) un point dans (ω_i).

Quand le nombre n des domaines (ω_i) augmente indéfiniment, les mesures des domaines (ω_i) tendant uniformément vers zéro, la somme (1) peut avoir une limite déterminée. Si cela a lieu, nous désignons cette limite par

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f(x) d\omega \tag{2}$$

et nous la nommons intégrale de Stieltjes.

Remarque. En disant que les domaines (ω_i) tendent uniformément vers zéro, nous entendons par là, que quelque soit le nombre positif ε, à partir d'un certain n tous les domaines (ω_i) peuvent être inscrits dans un intervalle ayant la mesure moindre que ε.

L'intégrale de Stieltjes en sa définition ordinaire pour le cas des domaines d'une dimension

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant à variation bornée, ne diffère de (2) que par la notation. Si, en effet, en désignant par (ω) l'intervalle (α, β):

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$

et en supposant que (Ω) est l'intervalle (a, b), on introduit la fonction moyenne

$$u(\omega) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha}, \tag{3}$$

on trouve sans peine, que $u(\omega)$ est à variation bornée et que

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \lim \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\left(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right) =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\, u(\omega_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \int_{(\Omega)} u(\omega) f(x) d\omega.$$

Inversement, étant donnée une fonction moyenne $u(\omega)$ additive et à variation bornée, si l'on pose

$$\varphi(x) = u(\omega)(x - a),$$

(ω) étant l'intervalle (a, x), on retrouve la formule (3), $\varphi(x)$ étant à variation bornée.

La définition des intégrales de Stieltjes pour les domaines, ayant une dimension supérieure à l'unité, donnée en 1910 par M. Frechet*, n'est aussi qu'un cas particulier de la définition introduite ci-dessus.** La définition donnée est aussi intimement liée avec la definition de M. Rodon;*** cette dernière traite des fonctions absolument additives des ensembles, tandis que nous nous contentons des fonctions des domaines, mais en leur imposant la condition d'être additives sans être absolument additives.

De la définition posée de l'intégrale il suit immédiatement que

$$\int_{(\Omega)} u(\omega)\, d\omega = u(\Omega)\,\Omega. \tag{4}$$

2. *Théorème.* Si la fonction $f(x)$ est continue dans (D_x), la somme I_n a une limite déterminée.

Pour le démontrer remarquons, qu'on peut supposer que les valeurs de la fonction moyenne $u(\omega)$ sont positives. En effet, si

$$u(\omega) = u_1(\omega) - u_2(\omega),$$

les valeurs de $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ étant positives, on a

$$I_n = \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) f(\xi_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{i=n} u_1(\omega_i) f(\xi_i)\,\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u_2(\omega_i) f(\xi_i)\,\omega_i$$

---

* M. Frechet. Extension au cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes. Nouv. Ann., t. 10, 1910.

** Voir aussi: N. Gunther. Sur application de fonctions universelles de M. A. Korn. C. R., Septembre, 1926; idem. Sur une application de la théorie de fermeture. Bull. Acad. Sc. URSS, 1927, №№ 1—2, 3—4 (en russe).

*** Rodon. Theorie und Anwendung der absolut-additiven Mengenfunktionen. Sitz.-ber. Akad. Wiss. Wien, 1913.

et la somme I_n a certainement une limite, si les sommes de la partie droite de la dernière égalité ont des limites.

Supposons que les valeurs de $u(\omega)$ sont positives.

En désignant par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans (ω_i) introduisons les sommes

$$(5) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) M_i \omega_i, \quad s_n = \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) m_i \omega_i$$

et, en supposant que les (ω_i) sont assez petits pour que l'oscillation de $f(x)$ dans chaque (ω_i) soit moindre qu'un nombre donné ε, on trouve

$$(6) \qquad s_n < I_n < S_n; \quad S_n - s_n < u(\Omega)\Omega\varepsilon.$$

Supposons qu'on augmente le nombre des morceaux $(\omega_1)\ldots(\omega_n)$ de (Ω) en les partageant; désignons par σ_n et Σ_n les sommes (5) obtenues dans cette supposition; par $(\omega^{(1)})\ldots(\omega^{(n)})$ les domaines correspondants. Quand on augmente n, la somme Σ_n décroît et la somme σ_n croît. On a, en effet, par exemple

$$u(\omega')\ M'\omega' + u(\omega'')M''\omega'' < M_i\{u(\omega')\omega' + u(\omega'')\ \omega''\} = M_i\ u(\omega^{(i)})\,\omega^{(i)},$$

si (ω') et (ω'') sont deux domaines, formant $(\omega^{(i)})$ et M', M'' les bornes supérieures de f dans ces domaines.

Il suit de là que pour la loi choisie de la formation des domaines (ω_i), les sommes σ_n et Σ_n ont une limite commune.

Supposons que la division de (Ω) en portions est poussée assez loin pour qu'on ait

$$S_n - s_n < \varepsilon, \quad \Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon,$$

ε étant un nombre choisi d'avance.

Formons maintenant de nouveaux domaines en divisant (ω_i) en portions par les frontières des $(\omega^{(1)}),\ldots(\omega^{(n)})$; désignons par c et C les sommes correspondantes à ces domaines, analogues à (5). Comme on obtient les nouveaux domaines soit en partageant $(\omega_1),\ldots(\omega_n)$, soit en partageant $(\omega^{(1)}),\ldots(\omega^{(n)})$, on a

$$s_n < c < C < S_n, \quad \sigma_n < c < C < \Sigma_n,$$

d'où on conclut

$$0 < c - s_n < S_n - s_n < \varepsilon, \quad 0 < c - \sigma_n < \Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < s_n - \sigma_n < \varepsilon;$$

comme σ_n a une limite, on en conclut que s_n en a une aussi et qu'on a

$$\lim I_n = \lim s_n = \lim S_n = \lim \sigma_n.$$

3. Si la fonction moyenne $u(\omega)$ est absolument continue, la fonction $f(x)$ dans (1) peut être remplacée par une fonction bornée et intégrable dans le sens de Riemann. Pour s'assurer, il suffit de démontrer que la seconde des inégalités (6) subsiste dans ce cas, car c'est seulement en l'établissant que nous avons fait l'usage de la continuité de la fonction f.

Or, les points, où l'oscillation $M - m$ de la fonction $f(x)$ est plus grande qu'un nombre donné ε, peuvent être enfermés dans un nombre fini des intervalles $(\omega^{(i)})$ dont la mesure totale est moindre qu'un nombre η donné d'avance; d'un autre côté, la fonction $u(\omega)$ étant absolument continue, si la mesure totale d'un nombre fini p des domaines

$$(\omega^{(1)}), (\omega^{(2)}), \ldots, (\omega^{(p)})$$

est plus petite qu'un nombre η convenablement choisi, on a

$$u(\omega^{(1)})\,\omega^{(1)} + \cdots + u(\omega^{(p)})\,\omega^{(p)} < \varepsilon.$$

Ayant choisi les intervalles $(\omega^{(i)})$ et en remarquant que les points à l'oscillation plus grande que ε de la fonction f sont tous à l'intérieur des $(\omega^{(i)})$, on peut déformer chaque intervalle $(\omega^{(i)})$ en domaine $(\underline{\omega}^{(i)})$ contenu dans $(\omega^{(i)})$ et contenant les dites points d'oscillation non nulle.

Supposons, que les (ω_i) sont si petits que $(1^{(0)})$ chaque domaine ayant un point commun avec un des $(\underline{\omega}^{(i)})$ est contenue dans $(\omega^{(i)})$ correspondant et que $(2^{(0)})$ dans chaque domaine (ω_i), qui n'a pas de points communs avec un des $(\underline{\omega}^{(i)})$, l'oscillation de la fonction f soit moindre que 2ε. Si M est la borne supérieure de $|f|$, on aura

$$S_n - s_n < \Sigma' u(\omega_i)\,\omega_i\,.\,2\varepsilon + M\Sigma u(\omega^{(i)})\,\omega^{(i)} < 2u(\Omega)\,\Omega\varepsilon + M\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour une fonction f qui n'est intégrable que dans le sens de M. Lebesgue la somme (1) peut ne pas avoir une limite déterminée. Par exemple, si $u(\omega) = 1$, cette somme est une somme de Riemann.

Comme chaque fonction moyenne $u(\omega)$ additive et à variation bornée peut être mise sous la forme

$$u(\omega) = v(\omega) + w(\omega),$$

où $v(\omega)$ est absolument continue, les valeurs de $w(\omega)$ étant presque partout égales à zéro, on peut généraliser le théorème en laissant de côté la condition de la continuité absolue de la fonction $u(\omega)$.

Remarquons, qu'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) f(\xi_i) \omega_i = \sum_{i=1}^{i=n} v(\omega_i) f(\xi_i) \omega_i + \sum_{i=1}^{i=n} w(\omega_i) f(\xi_i) \omega_i$$

et que la première somme à droite a une limite pour chaque fonction f bornée et intégrable dans le sens de Riemann. Il suffit, par conséquent, s'occuper de la seconde. Supposons que (E) est l'ensemble fermé, formé par les points, dans lesquels les valeurs de $w(\omega)$ sont différentes de zéro et par leurs points limites.

Pour que la somme (1) ait une limite, il suffit de supposer, que la fonction f est continue dans chaque point de l'ensemble (E).

En effet, supposons que la condition est remplie. Comme la fonction f est continue dans chaque point de l'ensemble (E), un nombre ε étant donné, à chaque point de l'ensemble on peut faire correspondre un domaine (ω) de manière, que l'oscillation de f dans (ω) soit plus petite que ε.

Comme à chaque point de l'ensemble (E) correspond un domaine et comme l'ensemble est fermé, on peut choisir parmie ces domaines un nombre fini

(7) $$(\omega^{(1)}), \ldots (\omega^{(n)}),$$

tels que chaque point de (E) soit à l'intèrieur de l'un des domaines (7). Les points de (E) étant dans l'intérieur des domaines (7), on peut à chacun d'entre eux $(\omega^{(i)})$ faire correspondre un domaine $(\underline{\omega}^{(i)})$ contenu dans $(\omega^{(i)})$ et contenant tous les points de (E), contenus dans $(\omega^{(i)})$.

Supposons que les domaines (ω_i) dans (1) sont si petits, que chacun d'entre eux, ayant un point commun avec $(\underline{\omega}^{(i)})$, est contenu dans $(\omega^{(i)})$. L'oscillation de f dans chacun de ces (ω_i) sera moindre que ε; la valeur de $w(\omega)$ pour les domaines, différents de ceux-çi est égale à zéro. On a donc pour la fonction $w(\omega)$

$$S_n - s_n < A\varepsilon,$$

A étant $w(\Omega)\Omega$.

4. Si les fonctions $u(\omega)$, f, F, ... répondent aux conditions des §§ 2 ou 3, on trouve aisément en se servant de la définition de l'intégrale

1) $\int\limits_{(\Omega)} Cu(\omega)f(x)\,d\omega = C\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f(x)\,d\omega$, C étant une constante,

2) $\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\{f(x)+F(x)\}\,d\omega = \int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f(x)\,d\omega + \int\limits_{(\Omega)} u(\omega)F(x)\,d\omega$,

2') $\int\limits_{(\Omega)} (u(\omega)+v(\omega))\,f(x)\,d\omega = \int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f(x)\,d\omega + \int\limits_{(\Omega)} v(\omega)f(x)\,d\omega$.

3) Si (Ω) est divisé en deux portions (Ω_1) et (Ω_2), on a:

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f(x)\,d\omega = \int\limits_{(\Omega_1)} u(\omega)f(x)\,d\omega + \int\limits_{(\Omega_2)} u(\omega)f(x)\,d\omega$$

4) La fonction $f(x)$ étant moindre que M en valeur absolue, on a

$$\left|\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f(x)\,d\omega\right| \leqq M\,U(\Omega)\,\Omega,$$

car

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)f(\xi_i)\,\omega_i\right| \leqq M\sum_{i=1}^{i=n} |u(\omega_i)|\,\omega_i \leqq M\sum_{i=1}^{i=n} U(\omega_i)\,\omega_i = MU(\Omega)\,\Omega.$$

5) Si

$$u(\omega) \geqq 0, \quad m < f(x) < M,$$

on a

$$mu(\Omega)\,\Omega \leqq \int\limits_{(\Omega)} u(\omega)f\,d\omega \leqq Mu(\Omega)\,\Omega,$$

car les valeurs de $u(\omega)$ étant positives, on a évidemment

$$m\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\,\omega_i < \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\,f(\xi_i)\,\omega_i < M\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\,\omega_i.$$

On conclut de là en premier lieu, que si $f(x)$ est continue, on a

$$\int_{(\Omega)} u(\omega)\,f\,d\omega = u(\Omega)\,\Omega\,f(\xi),$$

(ξ) étant un point dans (Ω).

Il suit de là en second lieu pour les fonctions $u(\omega)$, gardant le même signe, l'inégalité connue de Schwarz:

$$\left(\int_{(\Omega)} u(\omega)\,fF\,d\omega\right)^2 < \int_{(\Omega)} u(\omega)\,f^2\,d\omega\,.\int_{(\Omega)} u(\omega)\,F^2\,d\omega.$$

Si les valeurs de $u(\omega)$ sont positives, cette inégalité est une simple conséquence de (5); si les valeurs de $u(\omega)$ sont négatives, il suffit de l'appliquer à la fonction $-u(\omega)$.

6) Si

$$u(\omega)\,f(x) < v(\omega)\,F(x)$$

on a

$$\int_{(\Omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega \leqq \int_{(\Omega)} v(\omega)\,F(x)\,d\omega.$$

En effet, formant les sommes (1) correspondantes aux intégrales mentionnées, on peut se servir des mêmes domaines (ω_i) et des mêmes points (ξ_i) dans ces domaines.

Comme on a

$$-U(\omega)\,|f(x)| < u(\omega)\,f(x) < U(\omega)\,|f(x)|$$

on a

$$\left|\int_{(\Omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega\right| \leqq \int_{(\Omega)} U(\omega)\,|f(x)|\,d\omega.$$

5. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(x)$ est continue.

1) Si l'on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x),$$

les fonctions $\varphi_i(x)$ étant continues et la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x)|$$

uniformément convergente dans (Ω), on a:

$$(8) \qquad \int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(\Omega)} u(\omega)\, \varphi_i(x)\, d\omega.$$

En effet, si l'on pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x) + r_n(x),$$

on a, le nombre ε étant choisi arbitrairement, pour $n \geqq N$:

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

Il suit de là, que pour $n > N$:

$$\left| \int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(\Omega)} u(\omega)\, \varphi_i(x)\, d\omega \right| = \left| \int_{(\Omega)} u(\omega)\, r_n(x)\, d\omega \right| < \varepsilon\, U(\Omega)\, \Omega,$$

d'où suit l'égalité (8).

2) La série

$$(9) \qquad u_1(\omega) + u_2(\omega) + \cdots + u_n(\omega) + \cdots$$

est dite uniformément convergente dans (Ω), si $r_n(\omega)$ étant le terme complémentaire

$$u_n(\omega) + u_{n+1}(\omega) + \cdots$$

et $R_n(\omega)\omega$ sa variation totale, on a pour chaque choix de ε:

$$R_n(\omega)\omega < \varepsilon, \text{ pour } n \geqq N,$$

le nombre N ne dépendant pas de

Si la série (9) est uniformément c vergente, sa somme $u(\omega)$, qui est évidemment additive, est à variation bornée. En effet, si

$$R_{N_0}(\Omega)\Omega < 1,$$

on

$$\sum_{i=1}^{i=s} |u(\omega_i)|\,\omega_i \leqq \sum_{k=1}^{k=N_0} \sum_{i=1}^{i=s} |u_k(\omega_i)|\,\omega_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=s} |r_{N_0}(\omega_i)|\,\omega_i < \sum_{k=1}^{k=N_0} U_k(\Omega)\Omega + R_{N_0}(\Omega)\Omega < \sum_{k=1}^{k=N_0} U_k(\Omega)\Omega + 1,$$

$U_k(\omega)$ étant la variation moyenne de $u_k(\omega)$.

Si la série (9) est uniformément convergente dans (Ω) et si $u(\omega)$ est sa somme, on a

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(\Omega)} u_i(\omega) f(x)\, d\omega.$$

En effet, si l'on pose

$$u(\omega)\omega = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(\omega)\omega + r_n(\omega)\omega$$

on a, le nombre ε étant choisi arbitrairement, pour $n \geqq N$:

$$\left| \int_{(\Omega)} r_n(\omega) f(x)\, d\omega \right| < M R_n(\Omega)\Omega < M\varepsilon$$

M étant la borne de $|f(x)|$. On conclut de là, que

$$\left| \int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(\Omega)} u_i(\omega) f(x)\, d\omega \right| < M\varepsilon,$$

d'où suit l'éxactitude de la formule énoncée.

Si la série

$$(10) \qquad U_1(\omega)\,\omega + U_2(\omega)\,\omega + \cdots + U_n(\omega)\,\omega + \cdots$$

est uniformément convergente, c'est-à-dire, si l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(\omega)\,\omega < \varepsilon \ \text{ pour } \ n \geqq N,$$

la valeur de N étant indépendante du choix de (ω), la série (9) l'est aussi.

La condition est satisfaite, si la série (10) est convergente pour $\omega = \Omega$.

En effet, $(\omega_1) \ldots (\omega_s)$ étant les portions de (ω), on a

$$\sum_{i=1}^{i=s} \left| \sum_{k=n}^{k=m} u_k(\omega_i)\,\omega_i \right| \leqq \sum_{i=1}^{i=s} \sum_{k=n}^{k=m} |u_k(\omega_i)|\,\omega_i =$$

$$= \sum_{k=n}^{k=m} \sum_{i=1}^{i=s} |u_k(\omega_i)|\,\omega_i < \sum_{k=n}^{k=m} U_k(\omega)\,\omega.$$

On conclut de là en faisant tendre m vers l'infini, que

$$\sum_{i=1}^{i=s} |r_n(\omega_i)|\,\omega_i < \sum_{k=n}^{\infty} U_k(\omega)\,\omega < \varepsilon \ \text{ pour } \ n \geqq N$$

et que

$$R_n(\omega)\,\omega < \varepsilon \ \text{ pour } \ n \geqq N.$$

Pour donner un exemple, reprenons la fonction de l'exemple (2) du § 1 (1)*.

En supposant que (ω) est un intervalle fermé (α, β), posons $u_n(\omega) = 0$, si le nombre x_n n'appartient pas à l'intervalle (α, β) et

$$u_n(\omega)\,\omega = b_n, \ \text{ si } \ \alpha < x_n < \beta, \quad u_n(\omega)\,\omega = \frac{1}{2}\, b_n, \ \text{ si } \ \alpha = x_n \ \text{ ou } \ \beta = x_n.$$

* Le numéro entre parenthèses indique le chapitre.

En choisissant les domaines $(\omega_1)\ldots,(\omega_n)$ de manière, que x_n soit toujours la frontière commune de deux intervalles (ω') et (ω'') contigus, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} u_n(\omega_i) f(\xi_i)\,\omega_i = u_n(\omega') f(\xi')\,\omega' + u_n(\omega'') f(\xi'')\,\omega'' = \frac{1}{2} b_n\left(f(\xi') + f(\xi'')\right),$$

les points (ξ') et (ξ'') appartenant aux intervalles (ω') et (ω''). Il suit de là

$$\int_{(\Omega)} u_n(\omega) f(x)\,d\omega = \lim \frac{1}{2} b_n\left(f(\xi') + f(\xi'')\right) = b_n f(x_n),$$

la fonction $f(x)$ étant continue, (Ω) désignant l'intervalle (a, b). Comme pour la fonction moyenne $u(\omega)$ de l'exemple mentionné on a

$$u(\omega) = u_1(\omega) + u_2(\omega) + \cdots + u_n(\omega) + \cdots$$

on trouve

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\,d\omega = b_1 f(x_1) + b_2 f(x_2) + \cdots + b_n f(x_n) + \cdots$$

6. Supposons que les fonctions $u(\omega)$, f, F satisfont aux conditions des §§ 2 ou 3.

Lemme. Si l'on pose

$$v(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega) f(x)\,d\omega, \tag{11}$$

on forme une fonction moyenne additive et à variation bornée, qui est absolument continue quand $u(\omega)$ est absolument continue.

1) Le domaine (ω) étant divisé en deux portions (ω_1) et (ω_2), on a

$$v(\omega_1)\,\omega_1 + v(\omega_2)\,\omega_2 = \int_{(\omega_1)} u(\omega) f(x)\,d\omega + \int_{(\omega_2)} u(\omega) f(x)\,d\omega = \int_{(\omega)} u(\omega) f(x)\,d\omega = v(\omega)\,\omega.$$

2) Le domaine (D_x) étant divisé en portions $(\omega_1), \ldots, (\omega_n)$, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} |v(\omega_i)| \, \omega_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left| \int_{(\omega_i)} u(\omega) f(x) \, d\omega \right| < M \sum_{i=1}^{i=n} U(\omega_i) \, \omega_i = MU(\Omega) \, \Omega.$$

3) Si on prend au lieu de (Ω) le domaine (ω), on trouve

$$\sum_{i=1}^{i=n} |v(\omega_i)| \, \omega_i < MU(\omega) \, \omega$$

d'où il suit, comme on a, si $\omega < \eta$:

$$U(\omega) \, \omega < \varepsilon,$$

l'inégalité: si $\omega < \eta$

$$\sum_{i=1}^{i=n} |v(\omega_i)| \, \omega_i < M\varepsilon.$$

Comme il existe une division de (ω) en portions telles que

$$\sum_{i=1}^{i=n} |v(\omega_i)| \, \omega_i > V(\omega) \, \omega - \varepsilon,$$

on a finalement: si $\omega < \eta$

$$V(\omega) \, \omega < (M + 1) \, \varepsilon.$$

Remarquons encore, que, en décomposant la fonction $v(\omega)$ en deux parties positive et négative, on peut poser

$$v(\omega) = v_1(\omega) - v_2(\omega)$$

où

$$v_1(\omega) \, \omega = \frac{1}{2} \left\{ \int_{(\omega)} U(\omega) f(x) \, d\omega + \int_{(\omega)} u(\omega) f(x) \, d\omega \right\},$$

$$v_2(\omega) \, \omega = \frac{1}{2} \left\{ \int_{(\omega)} U(\omega) f(x) \, d\omega - \int_{(\omega)} u(\omega) f(x) \, d\omega \right\}$$

car on a évidemment

$$-U(\omega)\,|f(x)| \leqq u(\omega) f(x) \leqq U(\omega)\,|f(x)|.$$

Théorème. Si l'on pose

(11) $$v(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega,$$

on a l'égalité

(12) $$\int_{(\Omega)} u(\omega) f F d\omega = \int_{(\Omega)} v(\omega) F d\omega.$$

En établissant cette égalité on peut supposer, que les valeurs de u (ω) sont positives et que la borne inférieure de la fonction F est aussi positive.

En effet, en premier lieu, si on a

$$u(\omega) = u_1(\omega) - u_2(\omega),$$

$u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ étant les parties positive et négative de $u(\omega)$, ayant posé

$$v_1(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u_1(\omega) f(x)\, d\omega, \quad v_2(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u_2(\omega) f(x) d\omega,$$

on a

$$v(\omega) = v_1(\omega) - v_2(\omega)$$

et les égalités

$$\int_{(\Omega)} u_1(\omega) f F d\omega = \int_{(\Omega)} v_1(\omega) F d\omega, \quad \int_{(\Omega)} u_2(\omega) f F\, d\omega = \int_{(\Omega)} v_2(\omega) F d\omega$$

entraînent l'égalité (12).

En second lieu, si l'on a

$$F(x) > k, \quad F(x) - k > 0,$$

ayant l'identité

$$k \int_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega = k \int_{(\Omega)} v(\omega)\, d\omega,$$

on trouve, que si l'égalité

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) f(F-k)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} v(\omega)(F-k)\, d\omega$$

est satisfaite, l'égalité (12) l'est aussi.

Supposons maintenant qu'on a

$$u(\omega) \geqq 0, \quad F(x) \geqq 0.$$

En utilisant l'assertion (5) du § 4 on trouve

$$m_i u(\omega_i)\,\omega_i < v(\omega_i)\,\omega_i < M_i u(\omega_i)\,\omega_i,$$

m_i et M_i étant les bornes de la fonction f dans (ω_i), d'où il suit

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i u(\omega_i) F(\xi_i)\,\omega_i < \sum_{i=1}^{i=n} v(\omega_i) F(\xi_i)\,\omega_i < \sum_{i=1}^{i=n} M_i u(\omega_i) F(\xi_i)\,\omega_i.$$

On conclut de là que la différence

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} v(\omega_i) F(\xi_i)\,\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) f(\xi_i) F(\xi_i)\,\omega_i$$

est comprise entre

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) F(\xi_i)(M_i - m_i)\,\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)(f(\xi_i) - m_i) F(\xi_i)\,\omega_i$$

et

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) F(\xi_i)(m_i - M_i)\,\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)(f(\xi_i) - M_i) F(\xi_i)\,\omega_i.$$

Comme on a

$$|f(\xi_i) - m_i| < M_i - m_i, \quad |f(\xi_i) - M_i| < M_i - m_i$$

les valeurs absolues des différences (14) et (15) sont plus petites, que

(16) $$2M_1 \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)(M_i - m_i)\,\omega_i,$$

M_1 étant la borne supérieure de la fonction $F(x)$.

Comme la somme (16) est dans tous les cas infiniment petite pour $n \to \infty$, il suit de là que la différence (13) est infiniment petite et que le théorème est démontré.

7. Si la fonetion $u(\omega)$ est la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ bornée ou non, sommable dans le sens de M. Lebesgue:

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} f(x)\,d\omega$$

on a, la fonction $F(x)$ étant bornée et intégrable dans le sens de Riemann,

(17) $$\int_{(\Omega)} u(\omega)\,F(x)\,d\omega = \int_{(\Omega)} F(x) f(x)\,d\omega.$$

Si la fonction $f(x)$ est bornée et intégrable dans le sens de Riemann l'égalité (17) est une simple conséquence du théoréme du § 6.

Comme une fonction f sommable dans le sens de M. Lebesgue est égale a la différence entre deux fonctions non négatives $\underset{+}{f}$ et $\underset{-}{f}$ et comme la moyenne de f est la différence entre la moyenne de $\underset{+}{f}$ et la moyenne de $\underset{-}{f}$, on peut supposer que f n'est pas négative.

Or, pour chaque division de (Ω) en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$, on a

$$\int_{(\Omega)} Ff\,d\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(\omega_i)} Ff\,d\omega$$

et comme

$$m_i \int_{(\omega_i)} f\,d\omega \leqq \int_{(\omega_i)} Ff\,d\omega \leqq M_i \int_{(\omega_i)} f\,d\omega,$$

m_i et M_i étant les bornes de la fonction F dans le domaine (ω_i), on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) m_i \omega_i \leq \int_{(\Omega)} Ff\, d\omega \leq \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i) M_i \omega_i.$$

Il suit de là, que

$$\int_{(\Omega)} Ff\, d\omega,$$

étant enfermé entre deux variables ayant une même limite

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) F(x)\, d\omega,$$

est égale à cette limite.

Comme chaque fonction moyenne absolument continue $u(\omega)$ est égale à une moyenne d'une fonction f sommable dans le sens de M. Lebesgue:

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} f\, d\omega,$$

chaque intégrale de Stieltjes

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) F(x)\, d\omega,$$

dans laquelle $u(\omega)$ est absolument continue, $F(x)$ étant bornée et intégrable dans le sens de Riemann, est égale à l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} fF\, d\omega,$$

f étant une certaine fonction sommable dans le sens de M. Lebesgue.

8. En désignant par (τ) les domaines, appartenant à un domaine (D_y) des points (y), démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème. Si $u(\omega)$, $v(\tau)$ sont les fonctions moyennes additives et à variations bornées des domaines (ω) et (τ), appartenant aux domaines (D_x)

et (D_y) des points (x) et (y), et si $L(x, y)$ est une fonction continue des points (x) et (y) de ces domainés, on a

$$(18)\quad \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega)\left(\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x,y)\, d\tau\right) d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega) L(x,y)\, d\omega\right) d\tau.$$

Observons en premier lieu que les intégrales

$$\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x,y)\, d\tau, \quad \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega) L(x,y)\, d\omega$$

sont les fonctions continues des (x), respectivement des (y), d'où il suit que toutes les intégrales dans (18) ont un sens.

En effet, comme la fonction $L(x, y)$ est continue, quelque soit ε, on a

$$(19)\quad |L(x_1, y_1) - L(x_2, y_2)| < \varepsilon, \text{ si } |x_1 - x_2| < h, \ |y_1 - y_2| < h,$$

le nombre h étant convenablement choisi.

A cause de cela

$$\left|\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x_1, y)\, d\tau - \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x_2, y)\, d\tau\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\, [L(x_1, y) - L(x_2, y)]\, d\tau\right| < \varepsilon\, V(\Omega_y)\Omega_y < \varepsilon\, V(D_y) D_y,$$

si

$$|x_1 - x_2| < h.$$

En second lieu remarquons qu'on peut supposer, que les fonctions $u(\omega)$, $v(\tau)$ ont des valeurs positives. En effet, si

$$u(\omega) = u_1(\omega) - u_2(\omega), \quad v(\tau) = v_1(\tau) - v_2(\tau)$$

et si

$$\int\limits_{(\Omega_x)} u_1(\omega)\left(\int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau) L(x,y)\, d\tau\right) d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} u_1(\omega) L(x,y)\, d\tau\right) d\omega$$

$$\int\limits_{(\Omega_x)} u_2(\omega)\left(\int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau) L(x,y)\, d\tau\right) d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} u_2(\omega) L(x,y)\, d\omega\right) d\tau,$$

on trouve évidemment

$$\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\Big)d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} v_1(\tau)\Big(\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega)\,L(x,y)\,d\omega\Big)d\tau.$$

On peut de la même manière, en formant la dernière égalité pour la fonction $v_2(\tau)$, obtenir l'égalité (18).

Supposons que les valeurs de $u(\omega)$ et $v(\tau)$ soient positives. Formons maintenant la somme

$$(20) \qquad J_{n,m} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} u(\omega_i)\,v(\tau_j)\,L(x_i, y_j)\,\omega_i\,\tau_j,$$

ayant divisé (Ω_x) en n portions (ω_i), (Ω_y) en m portions (τ_j), les points (x_i) et (y_j) étant respectivement dans (ω_i), (τ_j). En désignant par $M_j(x)$, $m_j(x)$ les bornes de $L(x, y)$, (x) étant quelconque et (y) variant dans (τ_j), comme $M_j(x) - m_j(x)$ est la différence entre le maximum $L(x, y_j')$ et le minimum $L(x, y_j'')$ de la fonction $L(x, y)$ du point (y) variant dans (τ_j), on a, en usant l'inégalité (19),

$$M_j(x) - m_j(x) < \varepsilon,$$

si les domaines (τ_j) sont suffisamment petits.

On a

$$\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau = \sum_{j=1}^{j=m}\int\limits_{(\tau_j)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau = \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\,L(x, y_j')\,\tau_j,$$

(y_j') étant certains points dans (τ_j), dont la position dépend de point (x). Il suit de là, que (y_j) étant un point quelconque dans (τ_j), on a

$$(21) \qquad \Big|\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau - \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\,L(x, y_j)\,\tau_j\Big| <$$

$$< \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\,\Big|L(x, y_j') - L(x, y_j)\Big|\,\tau_j <$$

$$< \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\,\big(M_j(x) - m_j(x)\big)\,\tau_j < \varepsilon\, v(D_y)\, D_y,$$

si m est suffisamment grand; l'inégalité (21) est indépendante du choix de (x).

Il suit de là

$$(22)\quad \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} u(\omega_i)v(\tau_j)L(x_i,y_j)\omega_i\tau_j=\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\left(\sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)L(x_i,y_j)\tau_j\right)\omega_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\int_{(\Omega_y)} v(\tau)L(x_i,y)\,d\tau\cdot\omega_i+\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\,\theta_j\,\varepsilon\, v(D_y)\,D_y\,\omega_i,\quad |\theta_j|<1$$

la seconde somme dans la partie droite étant moindre que

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i)\,\omega_i\, v(D_y)\,D_y=\varepsilon\, u(\Omega_x)\,v(D_y)\,\Omega_x\,D_y.$$

L'égalité (22) étant établie pour un choix arbitraire des (τ_j) et la première somme en sa partie droite ayant une limite déterminée pour chaque choix des (ω_i) tendant uniformément vers zéro, on en conclut, que $J_{m,n}$ a une limite déterminée, quand les (ω_i) et (τ_j) tendent uniformément vers zéro et que

$$(23)\qquad \lim J_{m,n}=\int_{(\Omega_x)} u(\omega)\left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right)d\omega.$$

Ayant démontré l'existence de la limite $\lim J_{m,n}$ et établie l'égalité (23), on peut, en donnant la préférence à la fonction $u(\omega)$, établir aussi l'égalité

$$(24)\qquad \lim J_{m,n}=\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Omega_x)} u(\omega)\,L(x,y)\,d\omega\right)d\tau,$$

d'où suit l'egalité (18).

§ **9.** Supposons maintenant que la fonction moyenne additive dépend de la position d'un point (y) du domaine (D_y) et est à vàriation bornée pour chaque valeur de (y). En la désignant par

$$u(\omega, y),$$

nous admettons que sa borne totale

(25) $$U(D_x, y)\, D_x$$

est bornée comme fonction de (y) et que l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau$$

a un sens. La dernière condition est satisfaite, par exemple, si $u(\omega, y)$ est continue comme fonction de y pour chaque choix de (ω).

Quand les conditions posées sont satisfaites, on a

(26) $$\int\limits_{(\Omega_x)} \varphi(x) \Big(\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau \Big) d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau) \Big(\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\, \varphi(x)\, d\omega \Big) d\tau,$$

si $\varphi(x)$ est une fonction continue dans (Ω_x).

Remarquons d'abord que la fonction moyenne

(27) $$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau,$$

évidemment additive, est à variation bornée. On a, en effet, $(\omega_1) \ldots . (\omega_n)$ étant les portions de (ω),

(28) $$\sum_{i=1}^{i=n} \Big| \int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega_i, y)\, v(\tau)\, d\tau \Big| \omega_i \leqq \int\limits_{(\Omega_y)} \sum_{i=1}^{i=n} |u(\omega_i, y)|\, \omega_i\, V(\tau)\, d\tau \leqq$$
$$\leqq \int\limits_{(\Omega_y)} u(D_x, y)\, V(\tau)\, d\tau \leqq B\, V(\Omega_y) \Omega_y,$$

si B est la borne supérieure de la fonction (25).

Il suit de là, que l'intégrale à gauche de l'égalité (26) a un sens.

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Supposons, qu'on a choisi arbitrairement un nombre positif ε. Nous avons

(29) $$\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\, \varphi(x)\, d\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \int\limits_{(\omega_i)} u(\omega, y)\, \varphi(x)\, d\omega =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \{ u_1(\omega_i, y)\, \varphi(\xi_i')\, \omega_i - u_2(\omega_i, y)\, \varphi(\xi_i'')\, \omega_i \},$$

$u_1(\omega, y)$ et $u_2(\omega, y)$ étant les parties positive et négative de $u(\omega, y)$ et les points (ξ_i'), (ξ_i''), situés dans (ω_i), dépendant du choix de (y). Les points (ξ_i) étant choisis dans (ω_i) indépendamment de (y), si les domaines (ω_i) sont assez petits pour que l'oscillation de $\varphi(x)$ dans chaque domaine (ω_i) soit plus petite que ε, on a

$$(30)\qquad \left|\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\varphi(x)\,d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y)\varphi(\xi_i)\,\omega_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{i=n}\{u_1(\omega_i, y)(\varphi(\xi_i') - \varphi(\xi_i)) - u_2(\omega_i, y)(\varphi(\xi_i'') - \varphi(\xi_i))\}\,\omega_i\right| <$$

$$< \sum_{i=1}^{i=n}(u_1(\omega_i, y) + u_2(\omega_i, y))\,\omega_i\,\varepsilon < \varepsilon\, U(D_x, y)\,D_x < \varepsilon B.$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$(31)\qquad -\varepsilon B < \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\varphi(x)\,d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y)\varphi(\xi_i)\,\omega_i < \varepsilon B,$$

qui est satisfaite pour les (ω_i) assez petits et les (ξ_i) choisis arbitrairement dans les (ω_i).

Remarque. En s'appuyant sur l'inégalité (31) il est facile de démontrer, que la fonction de (y)

$$(32)\qquad \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\varphi(x)\,d\omega$$

est continue si $u(\omega, y)$ est continue pour chaque (ω).

On peut dans ce cas trouver un domaine (δ_i), entourant un point arbitrairement choisi (y), de manière qu'on ait

$$(33)\qquad |u(\omega_i, y_1)\,\omega_i - u(\omega_i, y)\,\omega_i| < \frac{\varepsilon}{n}$$

pour chaque point (y_1) dans (δ_i). Si (δ) est le domaine contenu dans tous les domaines (δ_1), (δ_2) .... (δ_n), l'inégalité (33) est satisfaite dans le domaine (δ) pour chaque i et on a

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y_1)\varphi(\xi_i)\,\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y)\varphi(\xi_i)\,\omega_i\right| < \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\varepsilon}{n}|\varphi(\xi_i)| < M\varepsilon,$$

M étant la borne supérieure de $|\varphi(x)|$

Ainsi on a pour les points du domaine (δ):

$$(34)\qquad -M\varepsilon < \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y_1)\varphi(\xi_i)\omega_i - \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, y)\varphi(\xi_i)\omega_i < M\varepsilon.$$

En mettant (y_1) à la place de (y) dans (31) et en combinant l'inégalité obtenue avec les inégalités (31) et (34), on trouve

$$-2\varepsilon B - \varepsilon M < \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y_1)\varphi(x)\,d\omega - \int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\varphi(x)\,d\omega < 2\varepsilon B + \varepsilon M,$$

d'où suit la continuité de la fonction (32).

Observons maintenant qu'on a

$$(35)\qquad \int\limits_{(\Omega_x)} \varphi(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega, y)v(\tau)\,d\tau\Big)d\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(\xi_i)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega_i, y)v(\tau)\,d\tau\Big)\omega_i + \\ + \theta_1\varepsilon, \quad |\theta_1| < \varepsilon,$$

si les domaines (ω_1), (ω_2), ... (ω_n) sont assez petits, les nombres (ξ_i) étant arbitrairement choisis dans les domaines correspondants; nous supposons, que les (ω_i) sont assez petits pour que l'inégalité (31) soit satisfaite.

Un domaine (ω_i) étant choisi, on a

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega_i, y)v(\tau)\,d\tau = \sum_{j=1}^{j=m} u(\omega_i, \eta_j)v(\tau_j)\tau_j + \theta_2\varepsilon, \quad |\theta_2| < 1$$

si les domaines (τ_1), ... (τ_m) sont moindres qu'un domaine $\tau(\omega_i)$ dépendant de (ω_i). Si les domaines (τ_1), ... (τ_m) sont plus petits que le plus petit des domaines

$$\tau(\omega_1), \quad \tau(\omega_2), \ldots, \quad \tau(\omega_n),$$

l'égalité

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\omega_i, y)v(\tau)\,d\tau = \sum_{j=1}^{j=m} u(\omega_i, \eta_j)v(\tau_j)\tau_j + \theta_2^{(i)}\varepsilon, \quad |\theta_2^{(i)}| < 1$$

a lieu pour toutes les valeurs de (i).

En utilisant (35) on trouve alors

(36)
$$\int_{(\Omega_x)} \varphi(x)\left(\int_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau\right) d\omega =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(\xi_i)\,\omega_i \sum_{j=1}^{j=m} u(\omega_i, \eta_j)\, v(\tau_j)\,\tau_j + \theta_1 \varepsilon + A\varepsilon,$$

A étant un nombre ne surpassant pas en valeur absolue

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi(\xi_i)|\,\omega_i < M D_x.$$

Comme l'inégalité (31) est satisfaite indépendemment de la valeur de (y), on trouve maintenant en l'utilisant, que

$$\int_{(\Omega_x)} \varphi(x)\left(\int_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau\right) d\omega =$$
$$= \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\left(\int_{(\Omega_x)} u(\omega, \eta_j)\,\varphi(x)\, d\omega\right)\tau_j + \theta_1 \varepsilon + A\varepsilon + A_1 \varepsilon$$

A_1 étant un nombre ne surpassant pas en valeur absolue

$$B \sum_{j=1}^{j=m} V(\tau_j)\,\tau_j < B\, V(D_x)\, D_y,$$

Il suit de la dernière égalité, que, ε étant choisi d'avance, si les domaines (τ_j) sont suffisamment petits:

$$\left|\int_{(\Omega_x)} \varphi(x)\left(\int_{(\Omega_y)} u(\omega, y)\, v(\tau)\, d\tau\right) d\omega -\right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{j=m} v(\tau_j)\left(\int_{(\Omega_x)} u(\omega, \eta_j)\,\varphi(x)\, d\omega\right)\tau_j\right| < C\varepsilon$$

C étant un nombre déterminé.

Il suit de là, que l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} u(\omega, y)\,\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau$$

existe et que l'égalité (26) est satisfaite.

10. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ n'est pas bornée dans (D_x) et devient infinie dans le point (x_0).

Soit (δ) un domaine contenant (x_0) dans son intérieur. Formons l'intégrale

(37) $$J(\delta) = \int\limits_{(\Omega-\delta)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega.$$

Si l'intégrale (37) a une limite déterminée quand (δ) tend vers zéro d'une manière quelconque, nous désignerons cette limite par

(37^1) $$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega.$$

Théorème. Si l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega-\delta_0)} U(\omega)\,|f(x)|\,d\omega,$$

dans laquelle (δ_0) est une sphère ayant pour centre le point (x_0), a une limite, l'intégrale (37) a une limite indépendante du choix de (δ).

En effet, (δ_1) et (δ_2) étant deux valeurs de (δ), (δ_1) contenant (δ_2), on peut construire deux sphères (δ_0') et (δ_0''), dont l'une contient (δ_1) et l'autre est contenue dans (δ_2). Comme on a

$$\left|\int\limits_{(\delta_1-\delta_2)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega\right| < \int\limits_{(\delta_1-\delta_2)} U(\omega)\,|f(x)|\,d\omega < \int\limits_{(\delta_0'-\delta_0'')} U(\omega)\,|f(x)|\,d\omega,,$$

on en conclut aisément, que notre assertion est justifiée.

Exemple. Supposons, que (D_x) est un volume et qu'on ait pour chaque sphère (ω_0) du rayon r_0

$$U(\omega_0)\,r_0^{\alpha} < B,$$

B étant un nombre déterminé. Prenons l'intégrale

(38) $$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) \frac{f(x)}{r_{10}^k}\, d\omega,$$

en désignant par r_{10} la distance entre le point (x) et un point donné (x_0), la fonction $f(x)$ étant bornée.

Pour s'assurer que l'intégrale (38) a un sens, il suffit de s'assurer que l'intégrale

$$M \int\limits_{(\delta_0' - \delta_0'')} U(\omega) \frac{d\omega}{r_{10}^k}$$

est infiniment petite avec (δ_0'), M étant la borne de $|f|$, (δ_0'), (δ_0'') deux sphères concentriques ayant le point (x_0) pour centre.

Supposons que r_0 est le rayon de (δ_0'), R le rayon de (δ_0''); intercalons dans l'intervalle (R, r_0) les nombres $r_1, \ldots, r_{n-1}$

$$r_0 > r_1 > \ldots > r_{n-1} > R$$

et divisons la couche sphérique $(\delta_0' - \delta_0'')$ en couches sphériques en traçant les sphères avec les rayons $r_1, \ldots, r_{n-1}$. Ayant divisé chaque couche en domaines $(\omega_i^{(j)})$, prenons les points dans chaque domaine d'une même couche sur la même sphère. Nous obtenons ainsi la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_j U(\omega_i^{(j)}) \frac{\omega_i^{(j)}}{r_{i+1}^k} = \sum_{i=0}^{i=n-1} U(\omega_i) \frac{\omega_i}{r_{i+1}^k},$$

$\omega_i)$ étant le volume d'une couche sphérique mentionnée. En désignant (ω_i) par $[r_i - r_{i+1}]$ et la sphère du rayon r_i par $[r_i]$, nous pouvons écrire

$$U([r_i - r_{i+1}])[r_i - r_{i+1}] = U([r_i])[r_i] - U([r_{i+1}])[r_{i+1}] =$$
$$= U([r_i])[r_i - r_{i+1}] + (U([r_i]) - U([r_{i+1}]))[r_{i+1}].$$

Il suit de là qu'on a

(39) $$\sum_{i=0}^{i=n-1} U([r_i - r_{i+1}]) \frac{[r_i - r_{i+1}]}{r_{i+1}^k} = \sum_{i=0}^{i=n-1} U([r_i]) \frac{[r_i - r_{i+1}]}{r_{i+1}^k} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{i=n-1} (U([r_i]) - U([r_{i+1}])) \frac{[r_{i+1}]}{r_{i+1}^k}.$$

Supposons maintenant que

$$r_i = r_0 - i\frac{r_0 - R}{n}, \quad \frac{r_0 - R}{n} < \frac{R}{2}.$$

La première somme dans (39) est plus petite que

(40)
$$B\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{[r_i - r_{i+1}]}{r_i^{\alpha}\, r_{i+1}^{k}} < B\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{[r_i - r_{i+1}]}{r_{i+1}^{k+\alpha}} =$$

$$= \frac{4\pi B}{3}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{r_i^3 - r_{i+1}^3}{r_{i+1}^{k+\alpha}} < \frac{4\pi B}{3}\, 7\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{r_i - r_{i+1}}{r_{i+1}^{k+\alpha-2}},$$

car

$$r_i^3 - r_{i+1}^3 = (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2)(r_i - r_{i+1}) < 7\, r_{i+1}^2 (r_i - r_{i+1}).$$

En effet

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = \frac{r_0 - i\alpha}{r_0 - (i+1)\alpha}, \quad \alpha = \frac{r_0 - R}{n}$$

croît avec i. On a donc

$$r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2 = r_{i+1}^2\left\{\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} + \frac{r_i}{r_{i+1}} + 1\right\} <$$

$$< r_{i+1}^2\left\{\frac{R^2}{\left(R - \frac{r_0 - R}{n}\right)^2} + \frac{R^2}{R - \frac{r_0 - R}{n}} + 1\right\} < 7 \cdot r_{i+1}^2.$$

Or, la partie droite de l'inégalité (40) tendant pour $n \to \infty$ vers l'intégrale

$$\int_R^{r_0}\frac{dr}{r^{k+\alpha-2}},$$

on voit, que si

$$k + \alpha - 2 < 1$$

elle est infiniment petite avec r_0. Si l'on a $k = 1$, on peut poser $\alpha = 2 - \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Si l'on a $k = 2$, on peut poser $\alpha = 1 - \lambda$.

La seconde somme dans (39) est égale à

$$\frac{4\pi}{3}\Big\{(U([r_0])-U([r_1]))\,r_1^{3-k}+(U([r_1])-U([r_2]))\,r_2^{3-k}+\cdots+$$

$$+(U([r_{n-1}])-U([R])\,R^{3-k}\Big\}=\frac{4\pi}{3}\Big\{U([r_0])\,r_1^{3-k}-$$

$$-U([r_1])\,(r_1^{3-k}-r_2^{3-k})-\cdots-U([r_{n-1}])\,(r_{n-1}^{3-k}-R^{3-k})-U([R])\,R^{3-k}\Big\}<$$

$$<\frac{4\pi}{3}U([r_0])\,r_1^{3-k}<\frac{4\pi}{3}B\frac{r_1^{3-k}}{r_0^{\alpha}}<\frac{4\pi B}{3}r_0^{3-k-\alpha}$$

et est infiniment petite pour les valeurs choisies de k et de α. Ainsi, l'intégrale (38) a un sens, si l'on a

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha=2-\lambda, & \text{pour } k=1\\ \alpha=1-\lambda, & \text{pour } k=2\end{array}\right\}\ 0<\lambda<1.$$

Si l'on a $k=3-\mu$, $0<\mu<1$, α doit être plus petite que μ.

Remarque. La définition, donnée au début du paragraphe, peut être généralisée. Convenons de dire, que l'ensemble des points (E) est intégrable, si, quelque soit le nombre positif η, on peut l'enfermer dans un nombre fini des intervalles ayant la mesure totale moindre que η. En désignant par (δ) l'ensemble de ces intervalles, on peut désigner par le signe (37') la limite de l'intégrale (37) pour $\eta\to 0$, si cette limite existe, quand la fonction $f(x)$ devient infinie dans les points d'ensemble (E).

11. Ayant généralisé la notion de l'intégrale, on peut sans peine étendre les théorèmes principaux des §§ 4, 6, 7 aux intégrales généralisées. La généralisation des assertions (1), (2) et (3) du § 4 est immédiate. Si les intégrales

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega,\quad \int\limits_{(\Omega)} v(\omega)\,F(x)\,d\omega$$

ont un sens, et si

$$u(\omega)\,f(x)<v(\omega)\,F(x),$$

on a aussi

$$\int\limits_{(\Omega-\delta)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega<\int\limits_{(\Omega-\delta)} v(\omega)\,F(x)\,d\omega,$$

(δ) ayant la même signification qu'au § 10, et en passant à la limite on trouve

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega \leqq \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) F(x)\, d\omega.$$

Enfin, si l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega)} U(\omega) |f(x)|\, d\omega$$

a un sens, l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega$$

suivant le théorème du § 10, en a un aussi et comme on a

$$\left|\int\limits_{(\Omega-\delta)} u(\omega) f(x)\, d\omega\right| < \int\limits_{(\Omega-\delta)} U(\omega) |f(x)|\, d\omega,$$

on a aussi

$$\left|\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega\right| \leqq \int\limits_{(\Omega)} U(\omega) |f(x)|\, d\omega.$$

La généralisation du théorème du § 6 peut être faite en deux directions. On peut, en premier lieu, supposer que la fonction F n'est pas bornée.

On peut écrire

$$\int\limits_{(\Omega-\delta)} u(\omega) f F\, d\omega = \int\limits_{(\Omega-\delta)} v(\omega) F\, d\omega$$

d'où suit que, si une des deux dernières intégrales a une limite pour $(\delta) \longrightarrow 0$, il en est de même de l'autre.

Supposons maintenant que la fonction f n'est par bornée, l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega)} U(\omega) |f(x)|\, d\omega$$

ayant un sens. Il suit de la supposition que

(41) $$\int\limits_{(\delta'-\delta'')} U(\omega) |f(x)|\, d\omega$$

est infiniment petite avec (δ'), (δ') et (δ'') ayant la même signification qu'au § 10.

Or, on a, F étant bornée,

$$\left|\int_{(\delta'-\delta'')} v(\omega) F d\omega\right| < M V([\delta'-\delta''])[\delta'-\delta''] < M \int_{(\delta'-\delta'')} U(\omega)|f(x)|\, d\omega,$$

d'où suit la convergence de l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f F d\omega$$

et l'exactitude de la formule

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f F d\omega = \int_{(\Omega)} v(\omega) F d\omega. \tag{12}$$

Si la fonction F n'est pas bornée, mais a avec f le même point de discontinuité, l'exactitude de la formule (12) dépend de la convergence de l'une des intégrales

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) f F d\omega, \quad \int_{(\Omega)} v(\omega) F d\omega,$$

car on peut restituer la formule (12) en passant à la limite dans l'égalité

$$\int_{(\Omega-\delta)} u(\omega) f F d\omega = \int_{(\Omega-\delta)} v(\omega) F d\omega,$$

Quant au teorème du § 7, qui est établie pour chaque fonction f intégrable dans le sens de M. Lebesgue, bornée ou non, il est nécessaire de l'étendre seulement au cas d'une fonction F non bornée. La formule (17) reste évidemment exacte, si l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} u(\omega) F(x)\, d\omega$$

a un sens, car on l'obtient en passant à la limite dans l'égalité

$$\int_{(\Omega-\delta)} u(\omega) F(x)\, d\omega = \int_{(\Omega-\delta)} F(x) f(x)\, d\omega.$$

12. Supposons qu'une fonction $L(x, y)$ devienne infinie pour $x = y$ de manière que les intégrales

$$\int_{(\Omega_y)} V(\tau)\,|L(x,y)|\,d\tau,\quad \int_{(\Omega_x)} |L(x,y)|\,d\omega$$

soient uniformément convergentes dans (Ω_x), respectivement dans (Ω_y), et que l'intégrale

$$\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau$$

est une fonction bornée de (x) et intégrable dans le sens de Riemann.

Suivant cette supposition, le nombre ε étant arbitrairement choisi, il existe un certain nombre ρ, tel que (ρ) étant une sphére du rayon ρ avec le centre dans le point (x), respectivement dans le point (y), on a

$$(44)\qquad \int_{(\rho)} V(\tau)\,|L(x,y)|\,d\tau < \varepsilon,\quad \int_{(\rho)} |L(x,y)|\,d\omega < \varepsilon.$$

Supposons encore, que le point (x) étant en dehors de la sphère du rayon ρ avec le centre en (y) et (y) étant en dehors de la sphère du rayon ρ avec le centre en (x), la fonction $L\ (x,\ y)$ est uniformément continue comme fonction de (x) et de (y); c'est-à-dire qu'on a pour les valeurs mentionnées de (x) et de (y)

$$(45)\qquad |L(x'',y'') - L(x',y')| < \varepsilon,\ \text{si}\ |x'' - x'| < \rho_1,\quad |y'' - y'| < \rho_1.$$

Démontrons, que

$$(46)\qquad \int_{(\Omega_x)} \left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right) d\omega = \int_{(\Omega_y)} v(\tau) \left(\int_{(\Omega_x)} L(x,y)\,d\omega\right) d\tau.$$

Il est clair, qu'il suffit de démontrer la formule (46) en supposant que les valeurs de $v\ (\tau)$ ne sont pas négatives; si elle est exacte pour les parties positive et négative d'une fonction moyenne $v\ (\tau)$, elle est exacte pour $v\ (\tau)$.

Supposons donc, que $v\ (\tau)$ n'est pas négative.

Envisageans deux sphères avec les rayons $\frac{\rho}{4}$ et $\frac{\rho}{2}$ ayant les centres dans les points (x), respectivement (y). Divisons le domaine (Ω_y) en domaines (τ_i), en supposant que les domaines (τ_i) soient si petits, que chaque domaine, ayant un point commun avec la sphère $\left(\frac{\rho}{4}\right)$ est situé dans l'intérieur de la sphère $\left(\frac{\rho}{2}\right)$.

Nous avons

$$(47) \int_{(\Omega_x)} \left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x,y)\, d\tau \right) d\omega = \sum \left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x_j, y)\, d\tau \right) \omega_j + \theta\varepsilon, \quad |\theta| < 1,$$

si les domaines (ω_j) sont assez petits.

En envisageant les domaines (ω_j) nous supposerons qu'il soient si petits, que chaque domaine ayant un point commun avec la sphère $\left(\frac{\rho}{2}\right)$ est situé dans l'intérieur de la sphère (ρ).

Supposons de plus, qu'on peut enfermer chaque domaine (τ_i) et (ω_j) dans une sphère du rayon ρ_1.

Désignons par (d) le domaine, formé par la réunion des domaines (τ_i), ayant les points communs avec la sphere $\left(\frac{\rho}{4}\right)$, avec le centre dans le point (x_j); le domaine (d) est contenu dans la sphère (ρ) mentionnée ci-dessus. Comme $v(\tau)$ est positive, nous avons

$$\int_{(\Omega_y - d)} v(\tau) L(x_j, y)\, d\tau = \sum^{(j)} \int_{(\tau_i)} v(\tau) L(x_j, y)\, d\tau = \sum^{(j)} v(\tau_i) L(x_j, y'_i) \tau_i,$$

le point (y'_i) étant dans (τ_i), sa position éventuellement dépendant de la position du point (x_j) et le signe $({}^{(j)})$ indiquant, que parmi les domaines (τ_i) manquent les domaines, contenus dans (d). Or, on a, (y_i) étant un point arbitraire dans (τ_i),

$$|L(x_j, y'_i) - L(x_j, y_i)| < \varepsilon.$$

Il suit de là, qu'on a

$$\int_{(\Omega_y - d)} v(\tau) L(x_j, y)\, d\tau = \sum^{(j)} v(\tau_i) L(x_j, y_i) \tau_i + a\varepsilon,$$

a étant un nombre déterminé, qui ne dépasse pas $v(\Omega_y)\, \Omega_y$.

En utilisant (44) on a

(48) $$\int_{(\Omega_y)} v(\tau) L(x_j, y)\, d\tau = \Sigma^{(j)} v(\tau_i) L(x_j, y_i) \tau_i + (a + 1)\varepsilon.$$

De même on peut écrire, en choisissant un point (y_i),

(49) $$\int_{(\Omega_x)} L(x, y_i)\, d\omega = \Sigma^{(i)} L(x_j, y_i) \omega_j + (b + 1)\varepsilon,$$

e signe $(^{(i)})$ indiquant, que parmi les domaines (ω_j) manquent les domaines contenus dans (d), ou (d) est formé par la réunion des domaines (ω_j), ayant un point commun avec la sphère du rayon $\frac{\rho}{2}$ avec le centre dans (y_i); le point (x_j) est arbitrairement choisi dans (ω_j).

En utilisant (47) et (48) on trouve

$$\int_{(\Omega_x)} \left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, d\tau\right) d\omega = \Sigma\left(\Sigma^{(j)} v(\tau_i) L(x_j, y_i) \tau_i\right) \omega_j + c\varepsilon$$

c étant un nombre déterminé, inférieur à

$$(a + 1)\, \Omega_x + 1.$$

Il suit de là qu'on a

50) $$\int_{(\Omega_x)} \left(\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, d\tau\right) d\omega = \Sigma\, v(\tau_i) \left(\Sigma\, L(x_j, y_i)\, \omega_j\right) \tau_i + c\varepsilon.$$

Dans la partie droite de (50) dans le coefficient de $v(\tau_i)$ il manque e terme $L(x_j, y_i)$, si la sphère du rayon $\frac{\rho}{4}$, ayant son centre dans (x_j), a un point commun avec (τ_i). Le point (x_j) étant placé dans (ω_j), (ω_j) a dans ce cas un point commun avec la sphère du rayon $\left(\frac{\rho}{2}\right)$, ayant sont centre dans (y_i), qui est dans l'intérieur de (τ_i). Il suit de là que les (ω_j), ayant un point commun avec les sphères du rayon $\frac{\rho}{2}$, ayant leurs centres dans (y_i), manquent

dans la somme (50) et qu'on peut utiliser les égalités (49). En les utilisant on trouve

$$(50') \qquad \int\limits_{(\Omega_x)} \left(\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, d\tau \right) d\omega = \Sigma\, v(\tau_i) \left(\int\limits_{(\Omega_x)} L(x, y_i)\, d\omega \right) \tau_i + g\varepsilon + c\varepsilon,$$

g étant un nombre borné inférieur à $V(\Omega_y)\,\Omega_y$.

On conclut de l'égalité (50′) à cause du choix de ε, que

$$\Sigma\, v(c_i) \left(\int\limits_{(\Omega_x)} L(x, y_i)\, d\omega \right) \tau_i$$

a une limite et que la formule (46) subsiste effectivement.

En établissant la formule (46) nous avons supposé, que la convergence de l'intégrale

$$(51) \qquad \int\limits_{(\Omega_x)} |L(x, y)|\, d\omega$$

est uniforme dans (Ω_y).

On peut, cependant, généraliser la fórmule (46) au cas, quand cette condition n'est pas satisfaite.

Supposons que, quelque soit un nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un domaine (δ_y), tel que

$$(52) \qquad V(\delta_y)\, \delta_y < \varepsilon$$

et que l'intégrale (51), en restant bornée par un nombre A pour les points (y) situés dans (δ_y), est uniformément convergente seulement dans le domaine $(\Omega_y - \delta_y)$.

On a évidemment

$$\int\limits_{(\Omega_x)} \left(\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, dt \right) d\omega = \int\limits_{(\Omega_x)} \left(\int\limits_{(\Omega_y - \delta_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, dt \right) d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(\Omega_x)} \left(\int\limits_{(\delta_y)} v(\tau)\, L(x, y)\, d\tau \right) d\omega.$$

On trouve sans peine en premier lieu en se servant de (52), que

$$(53)\qquad \left|\int\limits_{(\delta_y)} v(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} L(x,y)\,d\omega\right)d\tau\right| < AV(\delta_y)\,\delta_y < A\varepsilon.$$

En second lieu la première des inégalités (44) restant satisfaite, on trouve, le nombre ρ étant choisi et M désignant la borne supérieure de $|L(x,y)|$ dans $(\Omega_y - \rho)$, que

$$(53')\qquad \left|\int\limits_{(\delta_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right| < \left|\int\limits_{(\rho)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{(\delta_y-\rho)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right| < \varepsilon + MV(\delta_y)\,\delta_y < (1+M)\,\varepsilon.$$

Comme on a

$$\int\limits_{(\Omega_x)}\left(\int\limits_{(\Omega_y-\delta_y)} v(\tau)\,L(x,y)\,d\tau\right)d\omega = \int\limits_{(\Omega_y-\delta_y)} v(\tau)\left(\int\limits_{(\Omega_x)} L(x,y)\,d\omega\right)d\tau,$$

les inégalités (53), (53') conduisent à la conclusion que l'égalité (46) subsiste, ce qu'il fallait démontrer.

13. Pour donner immédiatement un exemple de l'application de cette dernière remarque, envisageons le potentiel newtonien

$$(54)\qquad V = \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,\frac{d\tau}{r_{10}},$$

où $v(\tau)$ est une fonction moyenne additive à variation bornée, repondant à la condition: pour chaque sphère (ω_0) du rayon r_0,

$$(55)\qquad V(\omega_0)\,r_0^{1-\lambda} < B.$$

Il suit des considérations du § 10, que sous la condition (55) les intégralés

$$(56)\qquad \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,\frac{\xi_1-\xi}{r_{10}^3}\,d\tau,\quad \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,\frac{\eta_1-\eta}{r_{10}^3}\,d\tau,\quad \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,\frac{\zeta_1-\zeta}{r_{10}^3}\,d\tau,$$

où (ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) sont les coordonnées des points (x) et (y), sont convergentes. Il est aisé de démontrer qu'elles sont égales respectivement aux dérivées de la fonction V par rapport à ξ, η, ζ.

Donnons à ξ un accroissement h et décrivons autour du point (x) une sphère de rayon $2h$. On s'assure aisément en se rappelant les raisonnements du § 10, que r' étant la distance du point $(\xi + h, \eta, \zeta)$ au point (y):

$$\left|\int_{(2h)} v(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}\right| < \int_0^{2h} r^\lambda\, dr = a\frac{(2h)^{1+\lambda}}{1+\lambda}, \quad \left|\int_{(2h)} v(\tau)\frac{d\tau}{r'}\right| < a\frac{(3h)^{1+\lambda}}{1+\lambda};$$

pour évaluer la seconde intégrale il suffit de prendre la sphère du rayon $3h$ avec le centre au point $(\xi + h, \eta, \zeta)$; cette sphère contient évidemment la sphère $(2h)$ dans son intérieur.

Comme, r'' étant la distance du point (y) à un point placé dans $(\Omega_y - 2h)$ entre (x) et $(\xi + h, \eta, \zeta)$, on a

$$(57) \quad -h < r'' - r_{10} < h, \quad 1 - \frac{h}{r_{10}} < \frac{r''}{r_{10}} < 1 + \frac{h}{r_{10}}, \quad \frac{1}{2} < \frac{r''}{r_{10}} < \frac{3}{2},$$

d'où l'on obtient

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_{10}} = \frac{h(\xi_1 - \xi)}{r_{10}^3} + \theta h^2 \frac{8.4}{r_{10}^3}, \quad |\theta| < 1,$$

ce qui donne aisément

$$\int_{(\Omega_y - 2h)} v(\tau)\frac{d\tau}{r'} - \int_{(\Omega_y - 2h)} v(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} =$$

$$= h\int_{(\Omega_y - 2h)} v(\tau)\frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3}\, d\tau + 32\,\theta h^2 a \int_{2h}^{d} \frac{dr_{10}}{r_{10}^{2-\lambda}}.$$

On conclut de là, que

$$\frac{1}{h}\left\{\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\frac{d\tau}{r'} - \int_{(\Omega_y)} v(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}\right\} - \int_{(\Omega_y)} v(\tau)\frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3}\, d\tau$$

est infiniment petite en même temps que h, ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons encore, que les intégrales (56) sont les fonctions continues de (x). En prenant deux points (x) et (x_1) à une distance égale à δ, traçons autour du point (x) comme centre une sphère du rayon (2δ).

En appliquant les formules du § 10, on trouve

$$(58) \quad \left| \int_{(2\delta)} v(\tau) \frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3} d\tau \right| < a \int_0^{2\delta} \frac{dr}{r^{1-\lambda}} < b\delta^\lambda; \quad \left| \int_{(2\delta)} v(\tau) \frac{\xi_1 - \xi'}{r'^3} d\tau \right| < b_1 \delta^\lambda,$$

ξ' étant la coordonnée du point (x_1) et r' distance de ce point; pour obtenir la seconde inégalité, il suffit de tracer autour du point (x_1) une sphère à rayon 3δ, qui contient évidemment la sphère (2δ) dans son intérieur.

En étudiant maintenant la différence

$$(59) \quad \int_{(\Omega_y - 2\delta)} v(\tau) \frac{\xi_1 - \xi'}{r'^3} d\tau - \int_{(\Omega_y - 2\delta)} v(\tau) \frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3} d\tau$$

et en remarquant que pour r' et r_{10} on a des inégalités analogues à (57), on obtient sans peine que

$$\left| \frac{\xi_1 - \xi'}{r'^3} - \frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3} \right| < a \frac{\delta}{r_{10}^3},$$

d'où on peut conclure en utilisant de nouveau les formules du § 10 que le nombre b étant suffisamment grand, la différence (59) est moindre que

$$\delta \int_{(2\delta)} \frac{dr}{r^{2-\lambda}} < b\delta^\lambda.$$

On conclut de tout cela, que, si la distance entre les points (x) et (x_1) est plus petite que δ, la différence des valeurs de

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

dans les points (x) et (x_1) est inférieure au nombre de la forme $c\delta^\lambda$, d'où suit la continuité de la dérivée considérée.

Supposons maintenant, que le domaine (Ω_x) dans la formule (50) soit une surface (Σ) répondant aux conditions de Liapounoff et contenant dans son intérieur le domaine (T).

On s'assure aisément, en écrivant (σ) à la place de (ω), que la formule

(60) $$\int\limits_{(\Sigma)}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\,\frac{\xi_1-\xi}{r_{10}^3}\,d\tau\Big)\,d\sigma = \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\Big(\int\limits_{(\Sigma)}\frac{\xi_1-\xi}{r_{10}^3}\,d\sigma\Big)\,d\tau$$

est applicable, quoique l'intégrale

$$\int\limits_{(\Sigma)}\frac{\xi_1-\xi}{r_{10}^3}\,d\sigma$$

ne soit pas uniformément convergente dans (Ω_y).

Couvrons la surface (Σ) par les sphères de Liapounoff d'un rayon suffisamment petit R en nombre fini, de manière que tout point de (Σ) soit à l'intérieur au moins d'une d'entre ces sphères et que les points intérieurs de ces sphères forment un domaine (δ) contenant (Σ) dans son intérieur.

En remarquant que

$$\frac{1}{4}\,\pi R^2 < \int\limits_{(\sigma)} d\sigma < 4\pi R^2,$$

(σ) étant la portion de (Σ) dans l'intérieur d'une des sphères de Liapounoff mentionnées, on s'assure sans peine, que le nombre N de ces sphères a la forme $\frac{C}{R^2}$, C étant borné.

Il suit de là que

$$V(\delta)\,\delta \leqq NB\,R^{2+\lambda} < BC\,R^{\lambda}$$

et que si on prend R assez petit pour que

$$BC\,R^{\lambda} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre choisi d'avance, on aura

$$V(\delta)\,\delta < \varepsilon.$$

La condition complémentaire du § 12 est donc satisfaite.

En désignant par (N_0) la normale extérieure à (Σ) et en utilisant la formule (60), on trouve

(61) $$\int\limits_{(\Sigma)}\frac{dV}{dn}\,d\sigma = \int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\Big(\int\limits_{(\Sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\Big)\,d\tau.$$

Il reste à évaluer l'intégrale dans la partie droite de la formule (61). Décomposons (Ω_y) en trois portions: en (δ), en domaine (Ω_y'), extérieur à (δ) et en domaine (Ω_y''), intérieur à (δ). On a

$$\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau = \int_{(\Omega'_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau +$$

$$+ \int_{(\delta)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau + \int_{(\Omega''_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau.$$

Or

$$\int_{(\Omega'_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau = 0;$$

$$\int_{(\Omega''_y)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau = -4\pi \int_{(\Omega''_y)} v(\tau)\, d\tau = 4\pi^2 (\Omega''_y)\, \Omega''_v$$

car pour les points extérieurs à (Σ) on a

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma = 0$$

et pour les points intérieurs à (Σ):

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\cos'(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma = -4\pi.$$

Comme, pour chaque position du point (y)

$$\left|\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right| < 4\pi,$$

on a

$$\left|\int_{(\delta)} v(\tau)\left(\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau\right| < 4\pi \int_{(\delta)} V(\tau)\, d\tau = 4\pi\, V(\delta)\, \delta < 4\pi\varepsilon.$$

On a, de plus,

$$|\, V(\Omega''_y)\, \Omega''_y - V(T)\, T| < V(\delta)\, \delta < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut, que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} v(\tau)\left(\int\limits_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10}, N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma\right) d\tau = -\,4\pi v(T)\, T.$$

Ainsi, les conditions posées étant données, on a

$$\int\limits_{(\Sigma)} \frac{dV}{dn}\, d\sigma = -\,4\pi v(T)\, T. \tag{62}$$

La dernière formule est la généralisation d'une formule, établie par moi dans mon mémoire: «Sur une application de la théorie de fermeture», où elle est démontrée pour le cas d'une fonction moyenne $v(\tau)$ bornée.

L'égalité (62) constitue un théorème qui remplace le théorème de Poisson pour les potentiels newtoniens en intégrales de Stieltjes.

14. En terminant donnons encore une généralisation de la notion de l'intégrale de Stieltjes.

Soit donnée une fonction $u(\omega, y)$ des domaines (ω), appartenants au domaine (D_x) des points (x), et des points (y), appartenants au domaine (D_y), en supposant que les domaines (D_x) et (D_y) ne diffèrent que par la notation de leurs points.

Supposons que

1) La fonction moyenne $u(\omega, y)$ pour chaque position du point (y) est additive et à variation bornée.

2) Pour chaque choix du domaine (ω), on a

$$|u(\omega, y)| < V_1(\omega),$$

$V_1(\omega)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée.

3) Quelque soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre ρ de manière que pour deux points (y_1) et (y_2), contenus dans une même sphère (ρ) du rayon ρ, on ait

$$|u(\omega, y_1) - u(\omega, y_2)| < \varepsilon\, V_2(\omega)$$

pour chaque choix du domaine (ω), $V_2(\omega)$ étant une fonction moyenne de la même nature que $V_1(\omega)$.

Pour donner un simple exemple d'uue pareille fonction, posons

$$u(\omega, y) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) L(x, y)\, d\omega,$$

$L(x, y)$ étant une fonction continue et $u(\omega)$ additive et à variation bornée. Si on a

$$|L(x, y)| < A$$

et si pour deux points (y_1) et (y_2) situés dans une même sphère (ρ) on a

$$|L(x, y_1) - L(x, y_2)| < \varepsilon,$$

on a aussi

$$|u(\omega, y)|\, \omega < A \int\limits_{(\omega)} U(\omega)\, d\omega = A U(\omega)\, \omega,$$

$$|u(\omega, y_1) - u(\omega, y_2)|\, \omega < \int\limits_{(\omega)} U(\omega)\, |L(x, y_1) - L(x, y_2)|\, d\omega < \varepsilon\, U(\omega)\, \omega.$$

On peut donc poser

$$V_1(\omega) = V_2(\omega) = A U(\omega).$$

Nous rencontrons d'autres exemples dans le chapitre 3.

Théorème. Si les domaines $(\omega_1), \ldots, (\omega_n)$ sont les portions du domaine (Ω) et tendent uniformément vers zéro quand $n \to \infty$, la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_i, x_i)\, \omega_i, \tag{63}$$

le point (x_i) appartenant au domaine (ω_i), a une limite bien déterminée. Nous désignons cette limite par

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega, x)\, d\omega. \tag{64}$$

Pour démontrer le théorème choisissons en premier lieu une suite des ensembles des domaines

$$(\tau_1^{(m)}),\ (\tau_2^{(m)}),\ \ldots\ (\tau_m^{(m)}) \quad m \to \infty$$

de manière que chaque ensemble suivant est formé en partageant en portions les domaines de l'ensemble qui lui précède.

Posons

$$\Sigma_m = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i^{(m)}, x_i^{(m)})\, \tau_i^{(m)}$$

et supposons que m est assez grand pour que chaque domaine $(\tau_i^{(m)})$ soit contenu dans une sphère (ρ).

Posons, qu'en formant les domaines $(\tau_i^{(m+n)})$ on doit partager $(\tau_i^{(m)})$ en portions

$$(\tau_i^{(m,1)}), \quad (\tau_i^{(m,2)}), \quad \ldots, \quad (\tau_i^{(m,s)}).$$

On a, alors,

$$\Sigma_{n+m} = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=s_m} u(\tau_i^{(m,k)}, x_i^{(m,k)})\, \tau_i^{(m,k)}),$$

et comme on a

$$u(\tau_i^{(m)}, x_i)\, \tau_i^{(m)} = \sum_{m=1}^{k=s_m} u(\tau_i^{(m,k)}, x_i)\, \tau_i^{(m,k)},$$

on a

$$(65) \quad |\Sigma_m - \Sigma_{n+m}| = \left| \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=s_m} [u(\tau_i^{(m,k)}, x_i) - u(\tau_i^{(m,k)}, x_i^{(m,k)})]\, \tau_i^{(m,k)} \right| <$$

$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=s_m} V_2(\tau_i^{(m,k)})\, \tau_i^{(m,k)} = \varepsilon \sum_{i=1}^{i=m} V_2(\tau_i)\tau_i = \varepsilon V_2(\Omega)\Omega.$$

Il suit de là que la suite

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m, \ldots$$

a une limite. Nous la désignons par (64) et nous lui donnons aussi le nom de l'intégrale de Stieltjes.

Supposons maintenant que dans la somme S_n chaque domaine (ω_i) est contenu dans la sphère (ρ).

Envisageons la somme Σ_m et formons de nouveaux domaines (δ_i) en choisissant pour leurs frontières les frontières des domaines (ω_i) et des domaines $(\tau_i^{(m)})$. Posons

$$A = \Sigma u(\delta_j, x_j)\, \delta_j.$$

Comme on parvient à A en partageant les domaines (ω_i), respectivement les domaines $(\tau_i^{(m)})$, on a

$$|S_n - A| < \varepsilon\, V_2(\Omega)\,\Omega, \quad |\Sigma_m - A| < \varepsilon\, V_2(\Omega)\,\Omega,$$

d'où il suit

$$|S_n - \Sigma_m| < 2\varepsilon\, V_2(\Omega)\,\Omega.$$

Or, il suit de (65) qu'on a

$$\Big|\Sigma_m - \int_{(\Omega)} u(\omega, x)\, d\omega\Big| < \varepsilon\, V_2(\Omega)\,\Omega.$$

Donc,

$$\Big|S_n - \int_{(\Omega)} u(\omega, x)\, d\omega\Big| < 3\varepsilon\, V(\Omega)\,\Omega < 3\varepsilon\, V_2(D_x)\, D_x$$

ce qu'il fallait démontrer.

De la définition de l'intégrale généralisée on conclut évidemment, que

$$\Big|\int_{(\Omega)} u(\omega, x)\, d\omega\Big| < V_1(\Omega)\,\Omega$$

$$\int_{(\Omega_1)} u(\omega, x)\, d\omega + \int_{(\Omega_2)} u(\omega, x)\, d\omega = \int_{(\Omega)} u(\omega, x)\, d\omega,$$

(Ω_1) et (Ω_2) étant deux portions de (Ω).

En remarquant que, $\varphi(y)$ étant continue, la fonction

$$u(\omega, y)\, \varphi(y)$$

est de la même nature que $u(\omega, y)$, on démontre aisément que

$$\int_{(\Omega)} u(\omega, x)\, \varphi(x)\, d\omega = \int_{(\Omega)} v(\omega)\, \varphi(x)\, d\omega, \tag{66}$$

où

$$v(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega, x)\, d\omega.$$

En effet, si (ω) est contenu dans une sphère (ρ), on a, (x_0) étant un point dans (ω):

$$|v(\omega)-u(\omega, x_0)| = \left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega, x)\, d\omega - \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega, x_0)\, d\omega_0\right| =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left|\int\limits_{(\omega)}\big(u(\omega, x)-u(\omega, x_0)\big)\, d\omega\right| \leqq \varepsilon\, V_2(\omega).$$

Si chaque (ω_i) est contenu dans une sphère (ρ) et si l'on a de plus

$$\left|\int\limits_{(\Omega)}\big(v(\omega)-u(\omega, x)\big)\,\varphi(x)\, d\omega - \sum_{i=1}^{i=m}\big(v(\omega_i)-u(\omega_i, x_i)\big)\,\varphi(x_i)\,\omega_i\right| < \varepsilon,$$

on a

$$\left|\int\limits_{(\Omega)} v(\omega)\,\varphi(x)\, d\omega - \int\limits_{(\Omega)} u(\omega, x)\,\varphi(x)\, d\omega\right| <$$

$$< A\varepsilon \sum_{i=1}^{i=n} V_2(\omega_i)\,\omega_i + \varepsilon = \varepsilon\big(A V_2(\Omega)\,\Omega + 1\big),$$

A étant la borne supérieure de $\varphi(x)$. Il suit de là l'exactitude de la formule (66).

Nous dirons que la fonction $u(\omega, y)$ est finie, si elle répond aux conditions de ce paragraphe.

Pour donner un exemple d'une fonction non finie, supposons, que le domaine (D_x) est l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, le domaine (ω) étant l'intervalle

$$\alpha \leqq x \leqq \beta,$$

et posons

$$u(\omega, y) = \frac{\sqrt[3]{\beta - y} - \sqrt[3]{\alpha - y}}{\beta - \alpha}.$$

La fonction $u(\omega, y)$ répond aux conditions du théorème du § 9, mais le signe

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega, x)\, d\omega$$

n'a aucun sens. Si l'on pose en formant les (ω_i)

$$\alpha_i = a + \frac{b-a}{m}(i-1), \quad \beta_i = a + \frac{b-a}{m}i, \quad x_i = a + \frac{b-a}{m}\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

on trouve en effet

$$\sum_{i=1}^{i=m} u(\omega_i, x_i)\,\omega_i = \sqrt[3]{b-a}\,(2m)^{\frac{2}{3}}.$$

15. On peut généraliser les résultats du § 14.

Supposons que (E) est un ensemble intégrable des points (y). Supposons que dans un domaine (δ_0), contenant (E), la fonction $V_1(\omega)$ est absolument continue et que quelque soit le domaine (δ), contenant (E), la condition (3) est satisfaite pour tous les (ω) appartenants au domaine $(\Omega - \delta)$, la fonction $V_2(\omega)$ étant remplacée par la fonction $V_2^{(\delta)}(\omega)$. Supposons encore que la variation totale $V_2^{(\delta)}(\Omega - \delta)(\Omega - \delta)$ est bornée par un nombre A, qui est indépendant de (δ).

Le théorème du § 14 reste exacte sous ces nouvelles suppositions. Désignons par δ_ε le domaine, contenant l'ensemble (E) et ayant la mesure moindre que ε. Pour démontrer le théorème il suffit de choisir les domaines $(\delta_{2\varepsilon})$ et (δ_ε) de manière qu'on ait

$$V_1(\delta_{2\varepsilon})\,\delta_{2\varepsilon} < 2\varepsilon, \quad V_1(\delta_\varepsilon)\,\delta_\varepsilon < \varepsilon$$

et de supposer, en formant les domaines $(\tau^{(m)})$, que chaque domaine $(\tau^{(m)})$, ayant un point commun avec (δ_ε), est tout entier en $(\delta_{2\varepsilon})$.

La partie droite de l'inégalité (65) sera remplacée par

$$\varepsilon V_2^{(\delta_\varepsilon)}(\Omega - \delta_\varepsilon)(\Omega - \delta_\varepsilon) + 2V_1(\delta_{2\varepsilon})\,\delta_{2\varepsilon} < A\varepsilon + 4\varepsilon,$$

d'où l'on conclut, que la variable Σ_m tend vers une limite.

Pour terminer la démonstration, il faut prendre les mêmes précautions en formant les domaines (ω_i).

Pour donner un exemple, envisageons la fonction moyenne

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x+y}}, \quad 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1.$$

Nous avons ici, (ω) étant l'intervalle (α, β),

$$V_1(\omega) = \frac{2}{\beta - \alpha} \{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\};$$

la fonction $V_1(\omega)$ est absolument continue comme la moyenne d'une fonction intégrable. Si (δ) est l'intervalle $(0, \delta)$ et si nous posons dans l'intervalle $(\delta, 1)$:

$$V_2^{(\delta)}(\omega) = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{2(\beta - \alpha)} \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\beta - \alpha} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right\}$$

nous avons évidemment

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \left| \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x + y_1}} - \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x + y_2}} \right| < |y_1 - y_2| \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} < \varepsilon V_2^{(\delta)}(\omega),$$

si l'on a

$$\rho < \varepsilon \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Si la fonction $u(\omega, y)$ répond aux conditions supplémentaires de ce paragraphe, nous dirons aussi qu'elle est finie.

CHAPITRE 3.

Les équations intégrales en intégrales de Stieltjes

1. Supposons, comme dans le § 14 (2), que les domaines (D_x) et (D_y) ne diffèrent que par la notation de leurs points.

Soit donnée une fonction moyenne

$$k(\tau, x) \tag{1}$$

des domaines (τ), appartenants au domaine (D_y) des points (y) et des points (x), appartenants au domaine (D_x).

Nous disons, que la fonction (1) répond à la condition (A), si elle répond aux conditions du théorème du § 9 (2), étant une fonction continue de (x) pour chaque choix de (τ); en répondant à la condition (A), la fonction $k(\tau, x)$ peut être finie ou non. Rappelons, que la fonction (1) répond aux conditions du théorème du § 9 (2), si

1) elle est additive et à variation bornée pour chaque choix de (x);

2) sa borne totale est bornée comme fonction de (x);

La fonction (1) est dite finie, si la condition (2) est remplacée par les deux suivantes:

2) pour chaque choix du domaine (τ) on a

$$|k(\tau, x)| < V_1(\tau),$$

$V_1(\tau)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée;

3) quelque soit le nombre positif ε on peut lui faire correspondre un nombre ρ de manière, que pour deux points (x') et (x'') contenus dans une même sphère (ρ) du rayon ρ on ait

$$|k(\tau, x') - k(\tau, x'')| < \varepsilon\, V_2(\tau),$$

pour chaque choix du domaine (τ), $V_2(\tau)$ étant une fonction de la même nature que $V_1(\tau)$, ou aux conditions un peu plus générales, mentionnées dans le § 15 (2).

Envisageons l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau + f(x), \tag{2}$$

la fonction $f(x)$ étant continue, et l'équation

$$\psi(\tau) = \lambda \int_{(D_x)} k(\tau, x)\, \psi(\omega) + F(\tau), \tag{3}$$

qui lui est associée.

Nous désignons par (ω) les domaines, qui appartiennent au domaine (D_x), et nous supposons, que la fonction moyenne $F(\tau)$ est additive et à variation bornée.

On peut démontrer qu'aux équations (2) et (3) est applicable la théorie de Fredholm, si la fonction $k(\tau, x)$ étant finie, répond à la condition (A).

Remarque. En parlant d'une fonction inconnue, nous supposons, qu'elle appartient à la classe des fonctions, pour lesquelles l'intégrale de Stieltjes est définie par nous.

Observons, que dans cette supposition, la fonction $k(\tau, x)$ étant finie, l'intégrale

$$\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau$$

est une fonction continue de (x). Si la fonction $\varphi(x)$ est continue, l'assertion est démontrée dans la remarque du § 9 (2). Si l'on suppose, que la fonction $\varphi(x)$ est bornée, ayant pour borne un nombre A, on a évidemment, les points (x') et (x'') appartenants à une même sphére (ρ):

$$\left|\int_{(D_y)} k(\tau, x')\varphi(y)\,d\tau - \int_{(D_y)} k(\tau, x'')\varphi(y)\,d\tau\right| =$$

$$= \left|\int_{(D_y)} (k(\tau, x') - k(\tau, x''))\,\varphi(y)\,d\tau\right| < \varepsilon A \int_{(D_y)} V_2(\tau)\,d\tau = \varepsilon A\, V_2(D_y)\, D_y.$$

Dans le cas d'une fonction $k(\tau, x)$, qui répond aux conditions du § 15 (2), on doit remplacer la dernière inégalité par

$$\left|\int_{(D_y)} (k(\tau, x') - k(\tau, x''))\,\varphi(y)\,d\tau\right| < \left|\int_{(D_y-\delta)} (k(\tau, x') - k(\tau, x''))\,\varphi(y)\,d\tau\right| +$$

$$+ \left|\int_{(\delta)} (k(\tau, x') - k(\tau, x''))\,\varphi(y)\,d\tau\right| < \varepsilon A\, V_2^{(\delta)}(D_y - \delta)(D_y - \delta) + 2V_1(\delta)\delta\cdot A,$$

(δ) étant le domaine contenant l'ensemble (E).

Comme $V_1(\omega)$ est absolument continue dans un domaine (δ_0) contenant (E), on peut choisir (δ) assez petit pour que $V_1(\delta)$ soit moindre que ε.

Enfin, si la fonction $\varphi(y)$ cesse d'être finie dans un point (y) et si (δ) est un domaine contenant ce point, on a, (δ) étant assez petit,

$$\int_{(D_y)} k(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau = \int_{(D_y-\delta)} k(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau + \theta\varepsilon, \quad |\theta| < 1,$$

d'où suit, l'intégrale dans la partie droite de l'égalité étant continue,

$$\left|\int_{(D_y)} k(\tau, x')\varphi(y)\,d\tau - \int_{(D_y)} k(\tau, x'')\varphi(y)\,d\tau\right| < 3\varepsilon.$$

En parlant des solutions des équations (2) et (3) dans la suite, nous supposerons, que les fonctions $\varphi(x)$ sont continues et que les fonctions moyennes $\psi(\tau)$ sont à variation bornée.

Il y a trois points qui peuvent attirer l'attention, quand on veut étendre la théorie des équations intégrales.

1) La possibilité de former les objets des calculs, ce qui revient à la démonstration de l'existence des intégrales; cette possibilité, comme nous le verrons, est assurée pour les fonctions (1) finies.

2) La validité de quelques inégalités, nécessaires pour la convergence des séries, qui est assurée par les théorèmes du § 4 (2).

3) La possibilté d'intervertir l'ordre des intégrations, qui est complètement assurée, comme nous le verrons, par le théorème du § 9 (2).

2. Soient

$$D_{z_1}, D_{z_2}, \dots, D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{y_1}, D_{y_2}, \dots$$

les domaines des points (z_1), (z_2), ... (x_1), (x_2), ... (y_1), (y_2) ... respectivement, qui ne diffèrent de (D_x) que par la notation de leurs points; soient

$$(\xi_1), (\xi_2) \dots, (\omega_1), (\omega_2), \dots, (\tau_1), (\tau_2) \dots$$

les domaines, qui leurs appartiennent.

Supposons en premier lieu, que le noyau $k(\tau, x)$ est fini. Formons le détérminant

$$(4) \qquad k\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(\tau_1, x_1), & k(\tau_2, x_1), & \dots, & k(\tau_n, x_1) \\ k(\tau_1, x_2), & k(\tau_2, x_2), & \dots, & k(\tau_n, x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(\tau_1, x_n), & k(\tau_2, x_n), & \dots, & k(\tau_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

La fonction (4), comme fonction de chaque couple

$$(5) \qquad (\tau_1, x_1), (\tau_2, x_2), \dots \quad (\tau_n, x_n),$$

est aussi finie. En effet, la fonction (4) est linéaire par rapport aux termes, dépendants de (τ_i) ou (x_i), d'où il suit, qu'elle est additive et à variation bornée et que, suivant le théorème de M. Hadamard, on a

$$(6) \qquad \left| k\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{pmatrix} \right| < n^{\frac{n}{2}} V_1(\tau_1) V_1(\tau_2) \dots V_1(\tau_n)$$

et

$$(6') \qquad \left| k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots x_n \\ \tau_1, \dots \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots \tau_n \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \dots x_n \\ \tau_1, \dots \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots \tau_n \end{pmatrix} \right| <$$

$$< n^{\frac{n}{2}} V_1(\tau_1) \dots V_1(\tau_{i-1}) V_2(\tau_i) V_1(\tau_{i+1}) \dots V_1(\tau)\varepsilon,$$

(x_i') et (x_i'') étant deux points appartenants à une même sphère (ρ) du domaine (D_{x_i}).

Dans le cas, quand $k(\tau, x)$ répond aux conditions du § 15 (2), il faut mettre $V_2^{(\delta)}(\tau_i)$ à la place de $V_2(\tau_i)$, si (τ_i) appartient au domaine $(D_y - \delta)$, et il faut remarquer, que $V_1(\tau)$ est absolument continue, si (τ_i) appartient au (δ_0).

On peut donc, en désignant par le signe

$$\int\limits_{(D_{z_1})} \dots \int\limits_{(D_{z_n})} (\qquad) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

le résultat des intégrations consécutives dans les domaines $(D_{z_n}) \dots (D_{z_1})$, former les séries

$$(7) \begin{cases} D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{(D_z)} k(\xi_1, z_1) d\xi_1 + \dots + \\ + \frac{(-\lambda)^n}{1.2 \dots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \dots \int\limits_{(D_{z_n})} k\begin{pmatrix} z_1, \dots z_n \\ \xi_1, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n + \dots \\ D\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix} \middle| \lambda \right) = k(\tau, x) - \lambda \int\limits_{(D_{z_1})} k\begin{pmatrix} x, z_1 \\ \tau, \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 + \dots + \\ + \frac{(-\lambda)^n}{1.2 \dots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \dots \int\limits_{(D_{z_n})} k\begin{pmatrix} x, z_1, \dots z_n \\ \tau, \xi_1, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n + \dots \\ D\left(\begin{matrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{matrix} \middle| \lambda \right) = k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{pmatrix} - \lambda \int\limits_{(D_{z_1})} k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1 \\ \tau_1, \dots \tau_m, \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 + \dots + \\ + \frac{(-\lambda)^n}{1.2 \dots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \dots \int\limits_{(D_{z_n})} k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n \\ \tau_1, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n + \dots \end{cases}$$

les intégrales ayant un sens suivant le théorème § 14 (2) et les séries étant convergentes suivant l'inégalité (6).

En effet, quand on veut effectuer dans l'une d'entre elles l'intégration suivant (ξ_i), on rencontre le terme $k(\xi_i, z_i)$, multiplié par les fonctions indépendantes de (ξ_i) et (z_i), et les termes, obtenus après les intégrations par rapport à (ξ_j); $j > i$, des fonctions $k(\xi_j, z_i)$ et des fonctions $k(\xi_i, z_j)$. Les derniers termes mentionnés sont les fonctions continues de (z_i) et les fonctions additives et à variation bornée des (ξ_i).

La fonction

$$(8) \qquad \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_n})} k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n \\ \tau_1, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n = l\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{pmatrix},$$

comme fonction de chaque couple (5), répond aux conditions imposées à la fonction $k(\tau, x)$.

Les termes de (8), dépendant de (τ_1), par exemple, sont de la forme

$$\int\limits_{(D_{z_i})} k(\tau_1, z_i)\, d\xi_i, \quad k(\tau_1, x_i)$$

et entrent dans (8) linéairement, d'où suit que la fonction (8) est additive et à variation bornée des (τ_i); d'après les inégalités (6) on a

$$(9) \qquad \left| l\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{pmatrix} \right| < (n+m)^{\frac{n+m}{2}} V_1(\tau) \dots V_1(\tau_m)\, V_1(D_x)^n D_x^{\,n}$$

et, si, par exemple, la fonction $k(\tau, x)$ vérifie les conditions du § 14 (2)

$$(9') \qquad \left| l\begin{pmatrix} x_1', x_2, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m \end{pmatrix} - l\begin{pmatrix} x_1'', x_2, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m \end{pmatrix} \right| <$$

$$< (n+m)^{\frac{n+m}{2}} V_2(\tau_1) V_1(\tau_2) \dots V_1(\tau_m)\, V_1(D_x)^n D_x^{\,n}\, \varepsilon.$$

Enfin, les inégalités (9) prouvent, que les séries (7) sont convergentes pour chaque valeur de λ.

Il suit de là, que

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m \end{pmatrix} \lambda \Bigg),$$

comme fonction de chaque couple (5), est finie. On a, en effet,

$$\left|D\begin{pmatrix}x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m\end{pmatrix}\lambda\Big)\right| < BV_1(\tau_1)\cdot V_1(\tau_2)\dots V_1(\tau_m)$$

$$D\begin{pmatrix}x_1', x_2, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m\end{pmatrix}\lambda\Big) - D\begin{pmatrix}x_1'', x_2, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m\end{pmatrix}\lambda\Big)\Big| < \varepsilon BV_2(\tau_1)\,V_1(\tau_2)\dots V_1(\tau_m),$$

B étant la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}}{1.2\dots n}|\lambda|^n\left(V_1(D_x)\,D_x\right)^n.$$

On doit, certainement, modifier le raisonnement dans le cas, quand la fonction $k(\tau, x)$ vérifie les conditions du § 15 (2).

3. Exemple. Envisageons la série *

$$u(\tau, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau)\,L_k(x, y), \tag{10}$$

les fonctions moyennes $u_k(\tau)$ étant additives et à variation bornée et les fonctions $L_k(x, y)$ étant continues.

Supposons, que $U_k(\tau)$ étant la variation moyenne de $u_k(\tau)$, on a

$$U_k(\tau) < U(\tau), \quad |L_k(x, y)| < M_k$$

la série

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

étant convergente et $U(\tau)$ étant une fonction additive et à variation bornée. La série (10) converge alors uniformément dans les domaines (D_x) et (D_y) et sa somme pour chaque choix de (τ) est une fonction continue de (x) et de (y).

On voit immédiatement que

$$|u(\tau, x, y)| < MU(\tau)$$

* J'ai considéré le noyau $u(\tau, x)$ dans ma communication au Congrès de Bologne.

et que, (x') et (x''), respectivement (y') et (y''), appartenant à une même sphère (ρ),

$$|u(\tau, x', y) - u(\tau, x'', y)| < 3\varepsilon U(\tau), \quad |u(\tau, x, y') - u(\tau, x, y'')| < 3\varepsilon U(\tau).$$

En effet, si pour $n \geqq N$ on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

et si ρ est choisi de manière que pour $k = 1, 2, \ldots n$

$$|L_k(x', y) - L_k(x'', y)| < \frac{\varepsilon}{n} \text{ ou } |L_k(x, y') - L_k(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{n},$$

on a, par exemple,

$$|u(\tau, x', y) - u(\tau, x'', y)| < U(\tau) \cdot \sum_{k=1}^{k=n} |L_k(x', y) - L_k(x'', y)| +$$

$$+ 2U(\tau) \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < 3\varepsilon U(\tau).$$

Il suit de là, qu'on peut former la fonction

$$(11) \qquad k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau, x, y)\, d\tau$$

et que cette fonction est finie, les fonctions $V_1(\tau)$ et $V_2(\tau)$ étant égales à $MU(\tau)$, si $M \geqq 3$.

La fonction (11) peut être obtenue en intégrant la série (10) terme à terme.

En effet, comme on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\tau) L_k(x, y) \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} U(\tau) M_k < U(\tau) \varepsilon$$

on a aussi

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\tau) L_k(x, y)\, d\tau \right| < \frac{1}{\tau} \varepsilon \int_{(\tau)} U(\tau)\, d\tau < \varepsilon U(\tau),$$

la somme

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\tau) L_k(x, y)$$

jouissant des propriétés, reconnues pour $u(\tau, x, y)$. On a ainsi,

$$k(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tau} \int u_k(\tau) L_k(x, y) d\tau.$$

Remarquons, que si l'on pose

$$(12)\; u\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ y_1, y_2, \dots y_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u(\tau_1, x_1, y_1), \dots u(\tau_i, x_1, y_i), \dots u(\tau_n, x_1, y_n) \\ u(\tau_1, x_2, y_1), \dots u(\tau_i, x_2, y_i), \dots u(\tau_n, x_2, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(\tau_1, x_n, y_1), \dots u(\tau_i, x_n, y_i), \dots u(\tau_n, x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

on a

$$k\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n} \int_{(\tau_1)} \int_{(\tau_2)} \dots \int_{(\tau_n)} u\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ y_1, y_2, \dots y_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{pmatrix} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

En effet on a évidemment

$$\frac{1}{\tau_i} \int_{(\tau_i)} u\begin{pmatrix} x_1, \dots x_i, \dots x_n \\ y_1, \dots y_i, \dots y_n \\ \tau_1, \dots \tau_i, \dots \tau_n \end{pmatrix} d\tau_i = \begin{vmatrix} u(\tau_1, x_1, y_1), \dots k(\tau_i, x_1), \dots u(\tau_n, x_1, y_n) \\ u(\tau_1, x_2, y_1), \dots k(\tau_i, x_2), \dots u(\tau_n, x_2, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(\tau_1, x_n, y_1), \dots k(\tau_i, x_n), \dots u(\tau_n, x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Si l'on pose

$$L_{k_1, k_2 \dots k_n}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ y_1, y_2, \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L_{k_1}(x_1, y_1), L_{k_2}(x_1, y_2) \dots L_{k_n}(x_1, y_n) \\ L_{k_1}(x_2, y_1), L_{k_2}(x_2, y_2) \dots L_{k_n}(x_2, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_{k_1}(x_n, y_1), L_{k_2}(x_n, y_2) \dots L_{k_n}(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

on trouve que la fonction (12) est la somme de la série

$$(12') \quad \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} u_{k_1}(\tau_1) u_{k_2}(\tau_2) \ldots u_{k_n}(\tau_n) L_{k_1, k_2 \ldots k_n} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_n \\ y_1, y_2, \ldots y_n \end{pmatrix},$$

d'où il suit que pour chaque couple

$$(13) \qquad (\tau_1, y_1), (\tau_2, y_2) \ldots (\tau_n, y_n)$$

et chaque (x_1), (x_2) ... (x_n) la fonction (12) est la somme d'une série de la forme (10) et que $k \begin{pmatrix} x_1, \ldots x_m \\ \tau_1, \ldots \tau_m \end{pmatrix}$ est la somme des moyennes des termes de cette série.

Comme chaque terme de la série (12') est la somme des produits de la forme

$$\prod_{i=1}^{i=n} c_i, \; c_i = u(\tau_i) L(x_j, y_i), j = 1, 2 \ldots, i \ldots n,$$

$k \begin{pmatrix} x_1, \ldots x_n \\ \tau_1, \ldots \tau_n \end{pmatrix}$ est égale à la somme de la série, chaque terme de laquelle est une somme des produits de la forme

$$\prod_{i=1}^{i=n} g_i, \; g_i = \frac{1}{\tau_i} \int\limits_{(\tau_i)} u(\tau_i) L(x_j, y_i) d\tau_i.$$

On démontre, maintenant, que les séries

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{(D_{z_1})} k(\xi_1, z_1) d\xi_1 + \cdots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{1.2 \ldots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_n})} k \begin{pmatrix} z_1, \ldots z_n \\ \xi_1, \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \cdots$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{(D_{z_1})} u(\xi_1, z_1, z_1) d\xi_1 + \cdots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{1, 2 \ldots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_n})} u \begin{pmatrix} z_1, \ldots z_n \\ z_1, \ldots z_n \\ \xi_1, \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \cdots$$

sont identiques.

Pour démontrer l'identité

$$\int_{(D_y)} k(\tau, y)\, d\tau = \int_{(D_y)} u(\tau, y, y)\, d\tau \tag{14}$$

remarquons qu'on a

$$|k(\tau, y) - u(\tau, y, y)| = \left|\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\xi, y, z)\, d\xi - \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\xi, y, y)\, d\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left|\int_{(\tau)}\Big(u(\xi, y, z) - u(\xi, y, y)\Big) d\xi\right| < 3\varepsilon U(\tau),$$

si (τ) est contenu dans une sphère (ρ), (y) étant contenu dans (τ).

Comme on a, les (τ_i) étant suffisamment petits,

$$\left|\int_{(D_y)}\big(k(\tau, y) - u(\tau, y, y)\big)\, d\tau - \sum_{i=1}^{i=n}\big(k(\tau_i, y_i) - u(\tau_i, y_i, y_i)\big)\, d\tau\right| < \varepsilon$$

on en conclut, que

$$\left|\int_{(D_y)}\big(k(\tau, y) - u(\tau, y, y)\big)\, d\tau\right| < \varepsilon + \sum_{i=1}^{i=n} 3\varepsilon U(\tau_i)\tau_i = \varepsilon\,(1 + 3U(D_y)\, D_y),$$

d'où il suit l'égalité (14).

Pour démontrer l'identité des coefficients de λ^n, envisageons l'intégration par rapport à (ξ_m).

Dans la seconde série dans le terme

$$\prod_{i=1}^{i=n} c_i$$

il faut évaluer les intégrales

$$u(\xi_i)\int_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\, L(z_j, z_m)\, L(z_m, z_i)\, d\xi_m$$

ou

$$\int_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\, L(z_m, z_m)\, d\xi_m,$$

auxquelles correspondent dans la première série les intégrales

$$\int\limits_{(D_{z_m})}\left(\frac{1}{\xi_m}\int\limits_{(\xi_m)} u(\xi_m)\,L(z_j, z_m)\,d\xi_m\right)\left(\frac{1}{\xi_i}\int\limits_{(\xi_i)} u(\xi_i)\,L(z_m, z_i)\,d\xi_i\right)d\xi_m$$

ou

$$\int\limits_{(D_{z_m})}\left(\frac{1}{\xi_m}\int\limits_{(\xi_m)} u(\xi_m)\,L(x_m, z_m)\,d\xi_m\right)_{x_m = z_m} d\xi_m$$

La seconde intégrale est égale à

$$\int\limits_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\,L(z_m, z_m)\,d\xi_m.$$

Quand à la première, on peut lui appliquer la formule (66) du § 14 (2) et l'égaler à

$$\int\limits_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\,L(z_j, z_m)\left(\frac{1}{\xi_i}\int\limits_{(\xi_i)} u(\xi_i)\,L(z_m, z_i)\,d\xi_i\right)d\xi_m.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas. Si $j \neq i$, elle est égale, suivant le théorème du § 8 (2), à

$$\frac{1}{\xi_i}\int\limits_{(\xi_i)} u(\xi_i)\left(\int\limits_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\,L(z_j, z_m)\,L(z_m, z_i)\,d\xi_m\right)d\xi_i = \frac{1}{\xi_i}\int\limits_{(\xi_i)} u(\xi_i)\,L_1(z_j, z_i)\,d\xi_i,$$

où $L_1(z_j, z_i)$ est une fonction continue. Elle forme un couple avec

$$\frac{1}{\xi_j}\int\limits_{(\xi_j)} u(\xi_j)\,L(\cdot, z_j)\,d\xi_j$$

et son tour viendra, quand on effectuera l'intégration suivant (ξ_i) ou (ξ_j).

Si l'on a $i = j$, le terme a la forme

$$\int\limits_{(D_{z_m})} u(\xi_m)\,L(z_i, z_m)\cdot\left(\frac{1}{\xi_i}\int\limits_{(\xi_i)} u(\xi_i)\,L(z_m, z_i)\,d\xi_i\right)d\xi_m.$$

Quand viendra le tour de l'intégration suivant (ξ_i), on pourra échanger, en se basant sur le théorème du § 8 (2), l'ordre des intégrations suivant

(ξ_i) et (ξ_m) et à l'intégrale intérieure appliquer la formule du § 14 (2). On trouve finalement

$$\int\limits_{(D_{z_m})}\int\limits_{(D_{z_i})} u(\xi_m)\,u(\xi_i)\,L(z_i, z_m)\,L(z_m, z_i)\,d\xi_i\,d\xi_m.$$

Le théorème du § 8 (2) permet encore une fois d'échanger les signes des intégrations suivant (ξ_i) et (ξ_m).

On s'assure de la même manière que le mineur

$$D\left(\begin{matrix}x_1, \ldots, x_m\\ \tau_1, \ldots, \tau_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right),$$

donné par la dernière formule (7), est égal à la moyenne de la somme de la série

$$\Delta\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m\\ y_1, \ldots y_m\\ \tau_1, \ldots \tau_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = u\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m\\ y_1, \ldots y_m\\ \tau_1, \ldots \tau_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{1.2\ldots n}\int\limits_{(D_{z_1})}\cdots\int\limits_{(D_{z_m})} u\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n\\ y_1, \ldots y_m, z_1, \ldots z_n\\ \tau_1, \ldots \tau_m, \xi_1, \ldots \xi_n\end{matrix}\right) d\xi_1 \ldots d\xi_m + \cdots$$

c'est-à-dire que

$$D\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m\\ \tau_1, \ldots \tau_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2 \ldots \tau_m}\int\limits_{(\tau_1)}\cdots\int\limits_{(\tau_m)} \Delta\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m\\ y_1, \ldots y_m\\ \tau_1, \ldots \tau_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) d\tau_1 \ldots d\tau_m.$$

On peut, en premier lieu, remplacer d'après (14) sous le signe de chaque intégrale

$$\int\limits_{(D_{z_1})}\cdots\int\limits_{(D_{z_n})} u\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n\\ y_1, \ldots y_m, z_1, \ldots z_n\\ \tau_1, \ldots \tau_m, \xi_1, \ldots \xi_n\end{matrix}\right) d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

la fonction par la valeur pour $t_1 = z_1, \ldots t_n = z_n$ de la moyenne de

$$u\left(\begin{matrix}x_1, \ldots x_m, t_1, \ldots t_n\\ y_1, \ldots y_m, z_1, \ldots z_n\\ \tau_1, \ldots \tau_m, \xi_1, \ldots \xi_n\end{matrix}\right)$$

par rapport à $(z_1), \ldots (z_n)$.

Les multiplicateurs, qui entrent dans les termes de la série après la formation de cette moyenne, sont les fonctions continues des (x_i) (ou des (y_i)) ou les fonctions additives et à variation bornée de la forme $v(\tau_i)$.

Cela montre en second lieu, que, en se basant sur le théorème du § 8 (2), on peut intervertir les signes des intégrations suivant $(\tau_1) \ldots (\tau_m)$ avec les signes des intégrations suivant $(\xi_1) \ldots (\xi_n)$.

En dernier lieu, quand on effectue l'intégration suivant $(\tau_1) \ldots (\tau_n)$ on regarde les variables $z_1 \ldots z_n$ et $t_1 \ldots t_n$ comme constantes et on peut substituer $z_1, \ldots z_n$ à la place des $t_1 \ldots t_n$ après les integrations.

4. Revenons maintenant aux considérations du § 2.

En poursuivant la théorie bien connue des équations intégrales, on démontre sans peine, en usant le développement des detérminants (4) suivant leurs éléments de la première ligne:

$$k\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n \\ \tau_1, \ldots \tau_m, \xi_1, \ldots \xi_n \end{pmatrix} = k(\tau_1, x_1)\, k\begin{pmatrix} x_2, \ldots x_m, z_1 \ldots z_n \\ \tau_2, \ldots \tau_m, \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} -$$

$$- k(\tau_2, x_1)\, k\begin{pmatrix} x_2, x_3 \ldots x_m, z_1 \ldots z_n \\ \tau_1, \tau_3 \ldots \tau_m, \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} - \cdots -$$

$$- k(\tau_m, x_1)\, k\begin{pmatrix} x_m, x_2, \ldots x_{m-1}, z_1 \ldots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{m-1}, \xi_1, \ldots \xi_n \end{pmatrix} -$$

$$- k(\xi_1, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_1, x_2, \ldots x_m, z_2, \ldots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m, \xi_2, \ldots \xi_n \end{pmatrix} - \cdots -$$

$$- k(\xi_n, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_n, x_2, \ldots x_m, z_1, \ldots z_{n-1} \\ \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m, \xi_1, \ldots \xi_{n-1} \end{pmatrix},$$

que

$$(15) \qquad D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots x_m \\ \tau_1, \ldots \tau_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \lambda \int_{(D\xi_1)} k(\xi_1, x_1)\, D\left(\begin{matrix} z_1, x_2 \ldots x_m \\ \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\xi_1 +$$

$$+ k(\tau_1, x_1) D\left(\begin{matrix} x_2, \ldots x_m \\ \tau_2, \ldots \tau_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) - k(\tau_2, x_1)\, D\left(\begin{matrix} x_2, x_3, \ldots x_m \\ \tau_1, \tau_3, \ldots \tau_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \cdots -$$

$$- k(\tau_m, x_1)\, D\left(\begin{matrix} x_m, x_2, \ldots x_{m-1} \\ \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{m-1} \end{matrix} \middle| \lambda\right).$$

En effectuant les calculs il faut faire attention seulement à la permutation de l'ordre des intégrations quand on établit l'identité des intégrales

$$\int_{(D_{z_1})}\cdots\int_{(D_{z_n})} k(\xi_1, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_1, x_2, \dots x_m, z_2, \dots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m, \xi_2, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n, \dots,$$

$$\int_{(D_{z_1})}\cdots\int_{(D_{z_n})} k(\xi_n, z_1)\, k\begin{pmatrix} z_n, x_2, \dots x_m, z_1, \dots z_{n-1} \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_{n-1} \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Or il suffit de démontrer que chaque intégrale suivante

$$(16)\quad \int_{(D_{z_1})}\cdots\int_{(D_{z_i})}\int_{(D_{z_{i+1}})}\cdots\int_{(D_{z_m})} k(\xi_{i+1}, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_{i+1}, x_2, \dots x_m, z_1, \dots z_i, \dots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_i, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

est égale à la précédente

$$\int_{(D_{z_1})}\cdots\int_{(D_{z_i})}\int_{(D_{z_{i+1}})}\cdots\int_{(D_{z_n})} k(\xi_i, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_i, x_2, \dots x_m, z_1, \dots z_{i+1}, \dots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_{i+1}, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

En changeant les notations dans l'intégrale (16) on trouve

$$(16')\quad \int_{(D_{z_1})}\cdots\int_{(D_{z_{i+1}})}\int_{(D_{z_i})}\cdots\int_{(D_{z_n})} k(\xi_i, x_1)\, k\begin{pmatrix} z_i, x_2, \dots x_m, z_1, \dots z_{i+1}, \dots z_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m, \xi_1, \dots \xi_{i+1}, \dots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

La fonction sous le signe de l'intégrale étant égale à la somme des termes de la forme

$$k(\xi_i, x_1)\, k(\xi_{i+1}, z_{i+1})\, k(\cdot, z_i),\ k(\xi_i, x_1)\, k(\xi_{i+1}, \cdot)\, k(., z_i)\, k(., z_{i+1}),$$
$$k(\xi_i, x_1)\, k(\xi_{i+1}, z_i)\, k(\cdot, z_{i+1}),$$

on voit que les intégrales provenant du premier et du second terme sont de simples produits des intégrales prises par rapport à (ξ_i) et (ξ_{i+1}).
Quand à l'intégrale du troisième terme, on a, suivant le théorème du § 9 (2),

$$\int_{(D_{z_{i+1}})}\left[\int_{(D_{z_i})} k(\xi_i, x_1)\, k(\xi_{i+1}, z_i)\, A(z_{i+1})\, d\xi_i\right] d\xi_{i+1} =$$

$$= \int_{(D_{z_i})}\left[\int_{(D_{z_{i+1}})} k(\xi_i, x_1)\, k(\xi_{i+1}, z_i)\, A(z_{i+1})\, d\xi_{i+1}\right] d\xi_i,$$

où $A\,(z_{i+1})$ est $k(\cdot, z_{i+1})$ ou une fonction continue, le résultat d'une intégration, effectuée sur cette quantité.

De la même manière on obtient

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots x_m \\ \tau_1, \ldots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda \int\limits_{(D_{z_1})} k(\tau_1, z_1)\, D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_m \\ \xi_1, \tau_2, \ldots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi_1 + \tag{17}$$

$$+ k(\tau_1, x_1)\, D\left(\begin{matrix} x_2, \ldots x_m \\ \tau_2, \ldots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) - k(\tau_1, x_2)\, D\left(\begin{matrix} x_1, x_3, \ldots x_m \\ \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \cdots -$$

$$- k(\tau_1, x_m)\, D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_{m-1} \\ \tau_m, \tau_2, \ldots \tau_{m-1} \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

En particulier, on a

$$D\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, D\left(\begin{matrix} z \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi + k(\tau, x)\, D(\lambda), \tag{18}$$

$$D\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \lambda \int\limits_{(D_z)} k(\tau, z)\, D\left(\begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi + k(\tau, x)\, D(\lambda). \tag{19}$$

5. On démontre de même, que si la fonction

$$\gamma(\tau, x)$$

répond à la condition (A) et satisfait aux équations

$$\left\{\begin{aligned} \gamma(\tau, x) &= \lambda \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, \gamma(\tau, z)\, d\xi + k(\tau, x), \\ \gamma(\tau, x) &= \lambda \int\limits_{(D_z)} k(\tau, z)\, \gamma(\xi, x)\, d\xi + k(\tau, x), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

les solutions des équations (2) et (3) sont données par les formules:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} f(y)\, \gamma(\tau, x)\, d\tau, \tag{21}$$

$$\psi(\tau) = F(\tau) + \lambda \int\limits_{(D_x)} F(\omega)\, \gamma(\tau, x)\, d\tau, \tag{22}$$

d'où il suit que

$$\Gamma(\tau, x, \lambda) = D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) : D(\lambda).$$

est la résolvante de l'équation (2).

En démontrant le théorème il faut seulement se rendre compte de la possibilité des transpositions de l'ordre des intégrations, qu'on doit effectuer pendant les calculs. En changeant dans l'équation (2) (x) et (τ, y) en y et (ξ, z) et en la multipliant par $\gamma(\tau, x)$ on trouve, suivant le théorème du § 9 (2), en intégrant par rapport à (τ)

$$\int\limits_{(D_y)} \gamma(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau = \int\limits_{(D_y)} \gamma(\tau, x) f(y)\,d\tau + \lambda \int\limits_{(D_y)} \gamma(\tau, x)\left(\int\limits_{(D_z)} k(\xi, y)\varphi(z)\,d\xi\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} \gamma(\tau, x) f(y)\,d\tau + \lambda \int\limits_{(D_z)} \varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} k(\xi, y)\gamma(\tau, x)\,d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} \gamma(\tau, x) f(y)\,d\tau + \int\limits_{(D_z)} \gamma(\xi, x)\varphi(z)\,d\xi - \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\varphi(z)\,d\xi,$$

après quoi on achève la démonstration comme d'ordinaire.

On a aussi, suivant le même théorème,

$$\int\limits_{(D_x)} \gamma(\tau, x)\psi(\omega)\,d\omega = \int\limits_{(D_x)} F(\omega)\gamma(\tau, x)\,d\omega +$$

$$+ \lambda \int\limits_{(D_x)} \gamma(\tau, x)\left(\int\limits_{(D_z)} k(\omega, z)\psi(\xi)\,d\xi\right)d\omega = \int\limits_{(D_x)} F(\omega)\gamma(\tau, x)\,d\omega +$$

$$+ \lambda \int\limits_{(D_z)} \psi(\xi)\left(\int\limits_{(D_x)} k(\omega, z)\gamma(\tau, x)\,d\omega\right)d\xi,$$

ce qui conduit facilement à la formule (22).

On conclut de là comme d'ordinaire, que, si λ n'est pas la racine de l'équation

$$D(\lambda) = 0,$$

la seule solution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau \tag{23}$$

ou de l'équation

$$\psi(\tau) = \lambda \int_{(D_x)} k(\tau, x) \psi(\omega) \, d\omega$$

est

$$\varphi(x) = 0$$

ou

$$\psi(\tau) = 0.$$

Réciproquement, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(\tau)$ données par les formules (21) et (22) sont respectivement les solutions des équations (2) et (3).

En effet, on obtient en transformant les équations (20)

$$24) \quad \begin{cases} (-k(\tau, x)) = \lambda \int_{(D_z)} (-\gamma(\tau, z))(-k(\xi, x)) \, d\xi + (-\gamma(\tau, x)) \\ (-k(\tau, x)) = \lambda \int_{(D_z)} (-\gamma(\xi, x))(-k(\tau, z)) \, d\xi + (-\gamma(\tau, x)). \end{cases}$$

On conclut de là, que les équations

$$\theta(x) = \lambda \int_{(D_y)} (-\gamma(\tau, x)) \theta(y) \, d\tau$$

$$\vartheta(\tau) = \lambda \int_{(D_x)} (-\gamma(\tau, x)) \vartheta(\omega) \, d\tau$$

n'ont pas d'autres solutions que

$$\theta(x) = 0$$

et

$$\vartheta(\tau) = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$\varphi(x) - \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x) \varphi(y) \, d\tau - f(x) = \omega(x),$$

on voit que $\varphi(x)$ est une solution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x) \varphi(y) \, d\tau + f(x) + \omega(x).$$

Il suit de là, que

$$\varphi(x) = f(x) + \omega(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} f(y)\gamma(\tau, x)\, d\tau + \lambda \int\limits_{(D_y)} \omega(y)\gamma(\tau, x)\, d\tau,$$

d'où l'on conclut, en retranchant l'égalité (21), que

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_{(D_y)} (-\gamma(\tau, x))\, \omega(y)\, d\tau$$

d'où il suit que

$$\omega(x) = 0.$$

De même, si l'on pose

$$\psi(\tau) = \lambda \int\limits_{(D_x)} u(\tau, x)\psi(\omega)\, d\omega + F(\tau) + \delta(\tau),$$

on en conclut que

$$\psi(\tau) = F(\tau) + \delta(\tau) + \lambda \int\limits_{(D_x)} F(\omega)\gamma(\tau, x)\, d\omega + \lambda \int\limits_{(D_x)} \delta(\omega)\gamma(\tau, x)\, d\omega,$$

d'où, en retranchant l'égalité (22), on trouve

$$\delta(\tau) = \lambda \int\limits_{(D_x)} (-\gamma(\tau, x))\, \delta(\omega)\, d\omega$$

et

$$\delta(\tau) = 0.$$

En traitant les mineurs d'ordre m comme les solutions des équations (15) et (17) on trouve sans peine

$$D\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{pmatrix}\lambda\Big) = D\begin{pmatrix} x_2, \dots x_m \\ \tau_2, \dots \tau_m \end{pmatrix}\lambda\Big) \left\{ k(\tau_1, x_1) + \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau_1, y) \frac{D\begin{pmatrix} x_1 \\ \tau \end{pmatrix}\lambda\Big)}{D(\lambda)}\, d\tau \right\} -$$

$$- D\begin{pmatrix} x_2, x_3, \dots x_m \\ \tau_1, \tau_3, \dots \tau_m \end{pmatrix}\lambda\Big) \left\{ k(\tau_2, x_1) + \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau_2, y) \frac{D\begin{pmatrix} x_1 \\ \tau \end{pmatrix}\lambda\Big)}{D(\lambda)}\, d\tau \right\} - \cdots -$$

$$- D\begin{pmatrix} x_m, x_2, \dots x_{m-1} \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_{m-1} \end{pmatrix}\lambda\Big) \left\{ k(\tau_m, x_1) + \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau_m, y) \frac{D\begin{pmatrix} x_1 \\ \tau \end{pmatrix}\lambda\Big)}{D(\lambda)}\, d\tau \right\}$$

et de même

$$D\left(\begin{matrix}x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m\end{matrix}\middle|\lambda\right) = D\left(\begin{matrix}x_2, \dots x_m \\ \tau_2, \dots \tau_m\end{matrix}\middle|\lambda\right)\left\{k(\tau_1, x_1) + \lambda\int\limits_{(D_x)} k(\omega, x_1)\frac{D\left(\begin{matrix}x_1 \\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}d\omega\right\} -$$

$$- D\left(\begin{matrix}x_1, x_3, \dots x_m \\ \tau_2, \tau_3, \dots \tau_m\end{matrix}\middle|\lambda\right)\left\{k(\tau_1, x_2) + \lambda\int\limits_{(D_x)} k(\omega, x_2)\frac{D\left(\begin{matrix}x \\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}d\omega\right\} - \dots -$$

$$- D\left(\begin{matrix}x_1, x_2, \dots x_{m-1} \\ \tau_m, \tau_2, \dots \tau_{m-1}\end{matrix}\middle|\lambda\right)\left\{k(\tau_1, x_m) + \lambda\int\limits_{(D_x)} k(\omega, x_m)\frac{D\left(\begin{matrix}x \\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}d\omega\right\}.$$

Ces formules permettent de construire les mineurs pas à pas quand on connait la résolvante.

Remarquons, que pour la démonstration des théorèmes de ce paragraphe nous avons eu besoin seulement de la condition (A), car nous avons utilisé seulement le théorème du § 9 (2); les théorèmes de ce paragraphe subsistent donc, si la fonction $k(\tau, x)$ n'est pas finie.

C'est seulement la formation du détérminant de Fredholm et de ces mineurs qui exige, que la fonction $k(\tau, x)$ soit finie.

6. Supposons, que $k(\tau, x)$ est finie.

Comme on a

$$\int\limits_{(D_{y_1})} \dots \int\limits_{(D_{y_m})} D\left(\begin{matrix}y_1, \dots y_m \\ \tau_1, \dots \tau_m\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\tau_1 \dots d\tau_m = (-1)^m D^{(m)}(\lambda),$$

si λ_0 est un nombre caractéristique d'ordre n, c'est-à-dire la racine d'ordre n de la fonction $D(\lambda)$, le mineur

$$D\left(\begin{matrix}x_1, \dots x_n \\ \tau_1, \dots \tau_n\end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

n'est pas identiquement nul pour $\lambda = \lambda_0$.

Soit

$$D\left(\begin{matrix}x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m\end{matrix}\middle|\lambda_0\right)$$

le premier des mineurs

$$D\left(\begin{matrix}x_1 \\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right), \quad D\left(\begin{matrix}x_1, x_2 \\ \tau_1, \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right), \dots$$

qui n'est pas identiquement égal à zéro pour $\lambda = \lambda_0$.

Choisissons les points $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ et les domaines $(\tau_1^{(0)}), \ldots (\tau_m^{(0)})$ de manière, qu'on ait

$$\Delta = D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \ldots x_m^{(0)} \\ \tau_1^{(0)}, \ldots \tau_m^{(0)} \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) \neq 0$$

et formons les fonctions

$$(25) \quad D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \ldots x_{i-1}^{(0)}, x, x_{i+1}^{(0)}, \ldots x_m^{(0)} \\ \tau_1^{(0)}, \ldots \tau_{i-1}^{(0)}, \tau_i^{(0)}, \tau_{i+1}^{(0)}, \ldots \tau_m^{(0)} \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) : \Delta = \Phi_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

et les fonctions moyennes

$$(26) \quad D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \ldots x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots x_m^{(0)} \\ \tau_1^{(0)}, \ldots \tau_{i-1}^{(0)}, \tau, \tau_{i+1}^{(0)}, \ldots \tau_m^{(0)} \end{matrix}\middle| \lambda_0\right) : \Delta = \Psi_i(\tau), \qquad i = 1, 2, \ldots m.$$

Comme, en formant les équations (14) et (17) on peut mettre chaque couple (x_i, τ_i) à la place du couple (x_1, τ_1) à cause de la symétrie des détérminants (4) et des mineurs par rapport aux couples (x_i, τ_i), on voit que les fonctions (25) et les fonctions moyennes (26) forment les solutions des équations homogènes (23).

Comme on a

$$(27) \; \Phi_i(x_i^{(0)}) = 1, \; \Phi_i(x_j^{(0)}) = 0, j \neq i, \; \Psi_i(\tau_i^{(0)}) = 1, \; \Psi_i(\tau_j^{(0)}) = 0, \; j \neq i,$$

les m fonctions (25), respectivement les m fonctions moyennes (26), sont linéairement indépendantes, l'identité

$$\alpha_1 \Phi_1(x) + \cdots + \alpha_m \Phi_m(x) = 0$$

étant, par exemple, impossible à cause des égalités (27).

On peut de la manière ordinaire démontrer, que chaque solution de l'une des équations (23) est une fonction linéaire aux coefficients constants des fonctions fondamentales (25) ou (26).

Si $H(\tau, x)$ est une fonction répondante à la condition (A), chaque solution de la première des équations (23) vérifie l'équation

$$(28) \quad \varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} \left[k(\tau, x) - H(\tau, x) + \lambda \int_{(D_z)} k(\tau, z) H(\xi, x) d\xi \right] \varphi(y) \, d\tau$$

et chaque solution de la seconde des équations (23) vérifie l'équation

$$(29)\quad \psi(\tau)=\lambda\int\limits_{(D_x)}\left[k(\tau,x)-H(\tau,x)+\lambda\int\limits_{(D_z)}H(\tau,z)\,k(\xi,x)\,d\xi\right]\psi(\omega)\,d\omega.$$

Ceci peut être aisément démontré, si on multiplie les équations (23) par $H(\tau, x)$ et si on les intègre, ayant recours au théorème du § 9 (2).

Si l'on pose maintenant

$$(30)\qquad H(\tau,x)=D\begin{pmatrix} x, x_1^{(0)}, \dots x_m^{(0)} \\ \tau, \tau_1^{(0)}, \dots \tau_m^{(0)} \end{pmatrix}\lambda_0\Bigg):\Delta,$$

les points $(x_1^{(0)})\dots(x_m^{(0)})$ et les domaines $(\tau_1^{(0)})\dots(\tau_m^{(0)})$ étant les points et les domaines choisis ci-dessus, on trouve sans peine en utilisant les formules (15) et (17), que

$$(31)\quad \begin{cases} H(\tau,x)=\lambda_0\int\limits_{(D_z)}k(\tau,z)\,H(\xi,x)\,d\xi+ \\ +k(\tau,x)-k(x_1^{(0)},\tau)\,\Phi_1(x)-\cdots-k(x_m^{(0)},\tau)\,\Phi_m(x) \\ H(\tau,x)=\lambda_0\int\limits_{(D_z)}k(\xi,x)\,H(\tau,z)\,d\xi+ \\ +k(\tau,x)-k(x,\tau_1^{(0)})\,\Psi_1(\tau)-\cdots-k(x,\tau_m^{(0)})\,\Psi_m(\tau). \end{cases}$$

La substitution de $H(\tau, x)$ dans les identités (28) et (29) conduit immédiatement à la démonstration de l'assertion mentionnée.

Les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(\tau)$, correspondant aux différents nombres caractéristiques, sont orthogonales, c'est-à-dire

$$\int\limits_{(D_y)}\Psi(\tau)\,\Phi(y)\,d\tau=0.$$

Si, en effet,

$$\Phi(y)=\lambda_1\int\limits_{(D_z)}k(\xi,y)\,\Phi(z)\,d\xi,\quad \Psi(\tau)=\lambda_2\int\limits_{(D_x)}k(\tau,x)\,\Psi(\omega)\,d\omega,\quad \lambda_1\neq\lambda_2$$

on a, en utilisant le théorème du § 9 (2)

$$\int\limits_{(D_y)} \Psi(\tau)\Phi(y)\,d\tau = \lambda_1 \int\limits_{(D_y)} \Psi(\tau)\Big(\int\limits_{(D_z)} k(\xi, y)\Phi(z)\,d\xi\Big)\,d\tau =$$

$$= \lambda_1 \int\limits_{(D_z)} \Phi(z)\Big(\int\limits_{(D_y)} k(\xi, y)\Psi(\tau)\,d\tau\Big)\,d\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int\limits_{(D_z)} \Phi(z)\Psi(\xi)\,d\xi$$

d'où suit

$$\Big(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)\int\limits_{(D_y)} \Psi(\tau)\Phi(y)\,d\tau = 0.$$

Remarquons, que la dernière conclusion est basée seulement sur le théorème du § 9 (2), c'est-à-dire qu'elle est exacte, si le noyau n'est pas fini.

Les équations

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau + f(x),$$

(32) resp.

$$\psi(\tau) = \lambda_0 \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)\psi(\omega)\,d\omega + F(\tau),$$

oú λ_0 est un nombre caractéristique, ont des solutions, si

(33) $$\int\limits_{(D_x)} f(x)\Psi_i(\omega)\,d\omega = 0, \text{ resp. } \int\limits_{(D_y)} F(\tau)\Phi_i(y)\,d\tau = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

On obtient une solution des équations (32) en posant

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} f(y) H(\tau, x)\,d\tau,$$

(34) resp.

$$\psi_0(\tau) = F(\tau) + \lambda_0 \int\limits_{(D_x)} F(\omega) H(\tau, x)\,d\omega,$$

où $H(\tau, x)$ est la fonction (30); pour obtenir les autres solutions des équations (32) il faut ajouter aux équations (34) les fonctions linéaires des fonctions fondamentales correspondantes.

En établissant la nécessité des conditions (33) et leur suffisance de la manière ordinaire, ayant recours aux formules (31), on n'a qu'à se servir

du théorème du § 9 (2) en intervertissant l'ordre des intégrations pendant les calculs.

7. La condition d'être finie, imposée à la fonction $k(\tau, x)$, était nécessaire seulement pour pouvoir former les séries (7). Sans cette condition, leur formation peut devenir impossible, comme le montre l'exemple de la fonction non finie du § 14 (2).

Mais les autres calculs des §§ 2—6 exigent seulement la condition (A). Supposons dans ce paragraphe, que la fonction $k(\tau, x)$ répond à la condition (A). On peut appliquer aux équations (2) et (3)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau + f(x), \qquad \psi(\tau) = \lambda \int_{(D_x)} k(\tau, x)\psi(\omega)\,d\omega + F(\tau)$$

le procédé d'itération et obtenir d'autres équations, correspondantes aux noyaux itérés.

En effet, le théorème du § 9 (2) permet de changer dans l'intégrale

$$\int_{(D_y)} k(\tau, x) \left(\int_{(D_z)} k(\xi, y)\varphi(z)\,d\xi \right) d\tau$$

l'ordre de l'intégration et de la transformer en

$$\int_{(D_z)} k_2(\xi, x)\varphi(z)\,d\xi,$$

où

$$k_2(\tau, x) = \int_{(D_z)} k(\tau, z)k(\xi, x)\,d\xi. \tag{35}$$

Si la borne totale de la fonction $k(\tau, x)$ est moindre que B, comme on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} |k_2(\tau_i, x)|\,\tau_i \leq \int_{(D_z)} \left(\sum_{i=1}^{i=m} |k(\tau_i, z)|\,\tau_i \right) K(\xi, x)\,d\xi <$$

$$< B \sum_{i=1}^{i=m} |k(\tau_i, z')|\,\tau_i < B^2,$$

$K(\xi, x)$ étant la borne moyenne de $k(\xi, x)$, on voit que la borne totale de la fonction $k_2(\tau, x)$ est bornée comme fonction de (x).

La continuité de l'intégrale (35) étant démontrée dans la remarque du § 9 (2), on voit que la fonction $k_2(\tau, x)$ satisfait à la condition (A).

En posant ainsi

$$k_n(\tau, x) = \int_{(D_z)} k_{n-1}(\tau, z) k(\xi, x) d\xi,$$

on démontre, comme à l'ordinaire, que

$$k_n(\tau, x) = \int_{(D_z)} k_{n-m}(\tau, z) k_m(\xi, x) d\xi;$$

en répétant les raisonnements, on démontre que

$$|K_n(\tau, x)| \tau < B^n.$$

Remarque. Si le noyau est fini, les noyaux itérés le sont aussi. En effet,

$$|k_2(\tau, x)| = \left|\int_{(D_z)} k(\tau, z) k(\xi, x) d\xi\right| < \int_{(D_z)} V_1(\tau) V_1(\xi) d\xi = V_1(\tau) V_1(D_z) D_z$$

et si la fonction $k(\tau, x)$ répond aux conditions du § 14 (2)

$$|k_2(\tau, x') - k_2(\tau, x'')| \leqq \int_{(D_z)} |k(\tau, z)| \varepsilon V_2(\xi) d\xi < \varepsilon V_1(\tau) V_2(D_z) D_z;$$

si la fonction $k(\tau, x)$ répond aux conditions du § 15 (2), on a, si (τ) appartient au domaine $(D_z - \delta)$:

$$|k_2(\tau, x') - k_2(\tau, x'')| \leqq \int_{(D_z - \delta)} |k(\tau, z)| \varepsilon V_2^{(\delta)}(\xi) d\xi +$$

$$+ 2\int_{(\delta)} |k(\tau, z)| V_1(\xi) d\xi < \varepsilon V_1(\tau) V_2^{(\delta)}(D_z - \delta)(D_z - \delta) + 2 V_1(\tau) V_1(\delta) \delta.$$

Il suit de là que, (δ) étant suffisamment petit,

$$|k_2(\tau, x') - k_2(\tau, x'')| < \varepsilon(A + 2) V_1(\tau).$$

On démontre de même que les solutions des équations (2) et (3) satisfont aux équations

$$(36)\qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^n \int\limits_{(D_y)} k_n(\tau, x)\,\varphi(y)\,d\tau + s_n(x), \\ \psi(\tau) &= \lambda^n \int\limits_{(D_x)} k_n(\tau, x)\,\psi(\omega)\,d\omega + \sigma_n(\tau), \end{aligned}$$

où $s_n(z)$ et $\sigma_n(\tau)$ sont les sommes des n premiers termes dans les développements des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(\tau)$ suivant les puissances de λ. On a

$$s_n(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) f(y)\,d\tau +$$
$$+ \lambda^2 \int\limits_{(D_y)} k_2(\tau, x) f(y)\,d\tau + \cdots + \lambda^{n-1} \int\limits_{(D_y)} k_{n-1}(\tau, y) f(y)\,d\tau$$

et

$$\sigma_n(\tau) = F(\tau) + \lambda \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x) F(\omega) d\omega +$$
$$+ \lambda_1^2 \int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) F(\omega)\,d\omega + \cdots + \lambda^{n-1} \int\limits_{(D_x)} k_{n-1}(\tau, x) F(\omega)\,d\omega.$$

On peut maintenant démontrer, que s'il existe une fonction $\gamma_n(\tau, x)$, répondant à la condition (A) et vérifiant les équations

$$(37)\qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_n(\tau, x) &= \lambda^n \int\limits_{(D_z)} k_n(\xi, x)\,\gamma_n(\tau, z)\,d\xi + k_n(\tau, x), \\ \gamma_n(\tau, x) &= \lambda^n \int\limits_{(D_z)} k_n(\tau, z)\,\gamma_n(\xi, x)\,d\xi + k_n(\tau, x), \end{aligned} \right.$$

les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, données par les formules (36), satisfont aux équations (2) et (3).

L'évaluation des fonctions

$$\omega(x) = \varphi(x) - \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\,\varphi(y)\,d\tau - f(x),$$

$$\vartheta(\tau) = \psi(\tau) - \lambda \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)\,\psi(\omega)\,d\omega - F(\tau)$$

conduit, en effet, aux équations

$$\omega(x) = \lambda^n \int\limits_{(D_y)} k_n(\tau, x)\, \omega(y)\; d\tau, \quad \vartheta(\tau) = \lambda^n \int\limits_{(D_x)} k_n(\tau, x)\, \vartheta(\omega)\, d\omega$$

qui, comme on a démontré dans le § 5, ont une seule solution

$$\omega(x) = 0, \quad \vartheta(\tau) = 0,$$

si les équations (37) peuvent être satisfaites par une fonction $\gamma_n(\tau, x)$. L'exécution des calculs n'exige que les permutations des signes des intégrations, qui sont toutes légitimes suivant le théorème du § 9 (2).

Comme cas particulier on trouve, que, s'il existe une fonction $\gamma_n(\tau, x)$ vérifiant les équations (37), la fonction

$$(38) \qquad \gamma(\tau, x) = \Sigma_n(\tau, x) + \lambda^n \int\limits_{(D_z)} \Sigma_n(\tau, z)\, \gamma_n(\xi, x)\, d\xi,$$

où

$$(39) \qquad \Sigma_n(\tau, x) = k(\tau, x) + \lambda k_2(\tau, x) + \cdots + \lambda^{n-1} k_{n-1}(\tau, x),$$

vérifie les équations (20) du § 5, ce qui permet de construire directemment les solutions des équations (2) et (3).

En cherchant par le procédé des itérations la solution des équations (20), on trouve sans peine

$$(40) \qquad \gamma(\tau, x) = k(\tau, x) + \lambda k_2(\tau, x) + \lambda^2 k_3(\tau, x) + \cdots$$

La fonction $\Sigma_n(\tau, x)$ dans (39) est égale à la somme des n premiers termes de la série (40); il suit des inégalités, établies pour les noyaux itérés, que cette série est convergente pour les valeurs de $|\lambda|$ suffisamment petites.

Si $k(\tau, x)$ est fini, la fonction $\gamma(\tau, x)$ ne diffère pas de $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ \tau \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) : D(\lambda)$ et on voit que le rayon de convergence de la série (39) est égal dans ce cas au plus petit module des racines de la fonction $D(\lambda)$.

Si le noyau $k(\tau, x)$ n'est pas fini, il peut arriver qu'un des noyaux itérés $k_n(\tau, x)$ est fini. Par exemple, pour la fonction de l'exemple du § 14 (2) c'est le noyau avec l'indice égale à 3.

Remarque. En fixant la condition (A) nous avons supposé que la fonction $k(\tau, x)$ est continue comme fonction de (x) pour chaque choix du domaine (τ). Pour la fonction la plus générale, répondante aux conditions du théorème du § 9 (2), quelques assertions, mentionnées ci-dessus, ne subsistent plus.

8. Nous dirons que la fonction moyenne additive et à variation bornée $u(\omega)$ satisfait à la condition (B), si toutes ses valeurs $u(\omega)$ sont positives. Si la fonction $u(\omega)$ satisfait à la condition (B), pour chaque fonction continue $h(x)$ l'égalité

(41)
$$\int_{(D_x)} u(\omega)\, h^2(x)\, d\omega = 0$$

entraine l'égalité

(41')
$$h(x) = 0.$$

En effet, si pour un point (x_1) $h^2(x)$ est différente de zéro, elle est différente de zéro dans un domaine (ω_0), contenant le point (x_1).

Or, comme on a

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\, h^2(x)\, d\omega = \int_{(\omega_0)} u(\omega)\, h^2(x)\, d\omega + \int_{(D_x - \omega_0)} u(\omega)\, h^2(x)\, d\omega;$$

les deux termes de la dernière somme ne pouvant pas être négatifs, on a

(42)
$$\int_{(\omega_0)} u(\omega)\, h^2(x)\, d\omega = 0,$$

qu'on peut écrire, les valeurs de $u(\omega)$ étant positives,

(42')
$$u(\omega)\, h^2(x') = 0$$

(x') ètant un point dans (ω_0), ce qui est en contradiction avec les suppositions faites ci-dessus.

Dans ma communication au Congrés des Mathématiciens à Bologne en 1928 je montrai, que toute la théorie des équations intégrales aux noyaux symétriques, y compris la théorie du développement suivant les fonc-

tions fondamentales, peut être étendue aux équations avec le noyau de la forme

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega_0)} u(\omega)\, L(x, y)\, d\omega, \tag{43}$$

la fonction $L(x, y)$ étant continue et symétrique et la fonctlon moyenne $u(\omega)$ répondant à la condition (B). Cette remarque peut être étendue avec certaines restrictions aux noyaux de la forme (43) dans lesquels la fonction symétrique $L(x, y)$ n'est pas bornée.

Nous dirons, que le noyau $k(\tau, x)$ satisfait à la condition (C) ou qu'il est symétrique par rapport à une fonction moyenne $u(\omega)$, répondante à la condition (B), si l'on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, k(\omega, y)\, d\tau, \tag{44}$$

pour chaque choix des domaines (ω) et (τ).

Exemples:

1) Si $k(x, y)$ est une fonction symétrique et si l'on pose

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} k(x, y)\, d\tau,$$

on obtient un noyau symétrique par rapport à $u(\omega) = 1$.

En effet on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} k(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\omega)}\Big(\int\limits_{(\tau)} k(x, y)\, d\tau\Big)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\Big(\int\limits_{(\omega)} k(y, x)\, d\omega\Big)\, d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} k(\omega, y)\, d\tau.$$

2) Si la fonction $u(\omega)$ vérifie la condition (B) et si $L(x, y)$ est symétrique, le noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L(x, y)\, d\tau$$

est symétrique par rapport à $u(\omega)$.

En effet on a, d'après le théorème du 8 (2),

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k(\tau, x)\,d\omega = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\Big(\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\,L(x, y)\,d\tau\Big)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\Big(\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,L(x, y)\,d\omega\Big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\Big(\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,L(y, x)\,d\omega\Big)\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\,k(\omega, y)\,d\tau.$$

Comme cas particulier, nous obtenons: si $p(x)$ est une fonction non négative, la fonction $k\,(x, y)$ étant symétrique, le noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} p(y)\,k(x, y)\,d\tau$$

est symétrique par rapport à

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} p(x)\,d\omega.$$

En effet, on a suivant le théorème du § 7 (2)

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\,k(x, y)\,d\tau.$$

Nous démontrerons dans le chapitre suivant, que si le noyau $k\,(\tau, x)$ répondant à la condition (C) est fini et satisfait de plus à la condition

$$V_1(\omega) < Cu(\omega),$$

son quatrième noyau itéré est de la forme

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\,L(x, y)\,d\tau,$$

la fonction $L(x, y)$ étant continue et symétrique.

9. Si le noyau $k(\tau, x)$ est symétrique par rapport à $u(\omega)$, tous les noyaux itérés le sont aussi.

Pour démontrer ceci remarquons que, comme

$$k_n(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k_{n-1}(\tau, z) k(\xi, x) d\xi = \int\limits_{(D_z)} k(\tau, z) k_{n-1}(\xi, x) d\xi,$$

on a, en appliquant l'égalité (44) et en se servant du théorème du § 9 (2),

$$(45)\quad \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_n(\tau, x) d\omega = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\Big(\int\limits_{(D_z)} k_{n-1}(\tau, z) k(\xi, x) d\xi\Big) d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k_{n-1}(\tau, z)\Big(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k(\xi, x) d\omega\Big) d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k_{n-1}(\tau, z)\Big(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi) k(\omega, z) d\xi\Big) d\xi = \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_{n-1}(\tau, z) k(\omega, z) d\xi.$$

La symétrie de la dernière expression par rapport à (τ) et (ω) pour $m = 2$ montre qu'on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_2(\tau, x) d\omega = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau) k_2(\omega, y) d\tau,$$

ce qu'il fallait démontrer en premier lieu.

En supposant maintenant que l'assertion est juste pour les noyaux ayant un indice moindre que n, nous pouvons écrire en prolongeant l'égalité (45):

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_n(\tau, x) d\omega = \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_{n-1}(\tau, z) k(\omega, z) d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k(\omega, z)\Big(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi) k_{n-1}(\tau, z) d\xi\Big) d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k(\omega, z)\Big(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau) k_{n-1}(\xi, y) d\tau\Big) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\Big(\int\limits_{(D_z)} k(\omega, z) k_{n-1}(\xi, y) d\xi\Big) d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau) k_n(\omega, y) d\tau,$$

ce qu'il fallait démontrer.

10. Supposons que le noyau $k(\tau, x)$ répond aux conditions (A) et (C), étant fini ou non. Nous allons démontrer que: 1) les fonctions fondamentales continues, correspondantes aux différents nombres caractéristiques, sont orthogonales par rapport à la fonction $u(\omega)$, 2) les nombres caractéristiques sont réels, 3) la série (40), qui a pour somme la résolvante, a un rayon de convergence fini.

Supposons, que λ est un nombre caractéristique et que $\varphi(x)$ est une fonction fondamentale qui lui correspond. Nous avons

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau.$$

En multipliant l'égalité par $u(\omega)$ et en intégrant, on trouve

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi(x)\,d\omega = \frac{\lambda}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\Big(\int_{(D_y)} k(\tau, x)\,\varphi(y)\,d\tau\Big)d\omega =$$
$$= \lambda \int_{(D_y)} \varphi(y)\Big(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,k(\tau, x)\,d\omega\Big)d\tau = \lambda \int_{(D_y)} \varphi(y)\Big(\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\,k(\omega, y)\,d\tau\Big)d\tau =$$
$$= \lambda \int_{(D_y)} \varphi(y)\,u(\tau)\,k(\omega, y)\,d\tau = \lambda \int_{(D_y)} k(\omega, y)\Big(\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\,\varphi(y)\,d\tau\Big)d\tau.$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi(x)\,d\omega \tag{45'}$$

est une solution de l'équation associée:

$$\psi(\omega) = \lambda \int_{(D_y)} k(\omega, y)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

On s'assure aisément que la fonction moyenne (45') est différente de zéro.

Si pour chaque (ω) on avait

$$\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi(x)\,d\omega = 0$$

on a, les valeurs de $u(\omega)$ étant positives,

$$\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi(x)\,d\omega = u(\omega)\,\varphi(x_i)\,\omega$$

et, comme $u(\omega)$ est différent de zéro, dans chaque domaine (ω) il existe un point (x_i) tel que

$$\varphi(x_i) = 0.$$

Comme la fonction $\varphi(x)$ est continue et comme le domaine (ω) peut être pris aussi petit que l'on veut, il suit de là que dans chaque point (x):

$$\varphi(x) = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

La fonction $\psi(\omega)$ est donc une fonction fondamentale de l'équation associée. Si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont deux fonctions fondamentales, correspondantes aux différents nombres caractéristiques, $\varphi_1(x)$ et

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi_2(x)\,d\omega$$

sont les fonctions fondamentales des équations intégrales associées, correspondantes aux différents nombres caratéristiques et on a

$$\int_{(D_x)} \psi_2(\omega)\,\varphi_1(x)\,d\omega = 0.$$

Mais on a, suivant le théorème du § 6 (2)

$$\int_{(D_x)} \psi_2(\omega)\,\varphi_1(x)\,d\omega = \int_{(D_x)}\left(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,\varphi_2(x)\,d\omega\right)\varphi_1(x)\,d\omega =$$

$$= \int_{(D_x)} u(\omega)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,d\omega.$$

Nous avons donc le *théorème*: Les fonctions continues $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, correspondantes aux différents nombres caractéristiques, sont orthogonales par rapport à $u(\omega)$.

Remarque. D'après une remarque dans le § 1, si le noyau $k(\tau, x)$ est fini, chaque fonction fondamentale est continue.

Il suit de là comme corollaire, que les nombres caractéristiques du noyau $k(\tau, x)$ sont tous réels.

En effet, si le nombre caractéristique était imaginaire, on aurait

$$\varphi_1(x) + i\varphi_2(x) = (a + bi) \int_{(D_y)} k(\tau, x)\left(\varphi_1(y) + i\varphi_2(y)\right) d\tau$$

en supposant que

$$\lambda = a + bi, \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x).$$

Il suit de là que

$$\varphi_1(x) - i\varphi_2(x) = (a - bi) \int_{(D_y)} k(\tau, x)\left(\varphi_1(y) - i\varphi_2(y)\right) d\tau$$

c'est-à-dire que $\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$ est une fonction fondamentale, correspondant au nombre caractéristique $\bar{\lambda} = a - bi$ qui est différent de λ. On a donc

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\left(\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)\right) d\omega = 0,$$

ce qui est impossible.

Exemple. Appliquons les formules du § 3 au noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) L(x, y)\, d\tau,$$

dans lequel $L(x, y)$ est continue et symétrique. Posons

$$(46) \qquad L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_n \\ y_1, \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L(x_1, y_1), & \dots & L(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ L(x_n, y_1), & \dots & L(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix} \lambda \Big) = L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix} -$$

$$-\lambda \int\limits_{(D_{z_1})} u(\xi) L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1 \\ y_1, \dots y_m, z_1 \end{pmatrix} d\xi + \dots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^k}{1.2\dots n} \int\limits_{(D_{z_1})} \dots \int\limits_{(D_{z_k})} u(\xi_1) \dots u(\xi_k) L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1 \dots z_k \\ y_1, \dots y_m, z_1 \dots z_k \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_k + \dots,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{(D_z)} u(\xi_1) L(z_1, z_1) d\xi_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1.2} \int\limits_{(D_{z_1})} \int\limits_{(D_{z_2})} u(\xi_1) u(\xi_2) L\begin{pmatrix} z_1, z_2 \\ z_1, z_2 \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 - \dots$$

Si λ_0 est une racine de $D(\lambda)$, on a pour les fonctions fondamentales qui lui correspondent les expressions

$$\varphi_s(x) = \frac{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \dots x_{s-1}^{(0)}, x, x_{s+1}^{(0)}, \dots x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, \dots y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)}, \dots y_m^{(0)} \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \dots x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)}, \dots x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, \dots y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)}, \dots y_m^{(0)} \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}$$

si

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)$$

est le premier mineur, qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_0$. Ayant posé

$$\psi_s(y) = \frac{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \dots x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)}, \dots x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, \dots y_{s-1}^{(0)}, y, y_{s+1}^{(0)}, \dots y_m^{(0)} \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)}, \dots x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)}, \dots x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, \dots y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)}, \dots y_m^{(0)} \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}$$

on conclut, que les fonctions fondamentales de l'équation associée sont données par les formules

$$\psi_s(\tau) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) \psi_s(y) d\tau.$$

A cause de la symétrie du déterminant (46) on voit aisément, que la fonction $\psi_s(x)$ peut être obtenue de la fonction $\varphi_s(x)$ en échangeant les constantes $(x_i^{(0)})$ et $(y_i^{(0)})$, d'où il suit que la fonction $\psi_s(x)$ est une fonction linéaire des fonctions $\varphi_s(x)$.

11. On s'assure aisément, qu'aucun des noyaux itérés n'est égal à zéro. Si l'on avait

$$k_n(\tau, x) = 0 \tag{47}$$

on aurait aussi

$$k_{n+1}(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k_n(\tau, z) k(\xi, x)\, d\xi = 0.$$

On peut, donc, supposer qu'à cause de

$$k_{2l}(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k_{l+1}(\tau, z) k_{l-1}(\xi, x)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)} k_l(\tau, z) k_l(\xi, x)\, d\xi,$$

on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_{2l}(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\Big(\int\limits_{(D_z)} k_{l+1}(\tau, z) k_{l-1}(\xi, x)\, d\xi\Big)\, d\omega = \tag{48}$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k_{l+1}(\tau, z)\Big(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_{l-1}(\xi, x)\, d\omega\Big)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} k_{l+1}(\tau, z)\Big(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi) k_{l-1}(\omega, z)\, d\xi\Big)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_{l+1}(\tau, z) k_{l-1}(\omega, z)\, d\xi.$$

De même

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_{2l}(\tau, x)\, d\omega = \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_l(\tau, z) k_l(\omega, z)\, d\xi. \tag{48'}$$

Si l'on suppose que

$$k_{2l}(\tau, x) = 0,$$

on trouve que pour tous les (τ) et (ω)

$$\int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_l(\tau, z) k_l(\omega, z)\, d\xi = 0,$$

d'où il suit, si l'on identifie (ω) et (τ),

$$\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k_l^2(\tau, z)\, d\xi = 0, \quad k_l(\tau, z) = 0.$$

Il suit de là que ni le noyau $k_{2l}(\tau, \lambda)$ ni le noyau $k_{2l-1}(\tau, \lambda)$ ne peut être le premier noyau se réduisant à zéro.

En revenant maintenant à la démonstration de la troisième assertion énoncée dans le § 10, remarquons d'abord que la formule (48') conduit à l'égalité

(49) $$\left(\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_{2l}(\tau, x)\, d\omega\right)_{\tau=\omega} = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k_l^2(\omega, z)\, d\xi.$$

Supposons que la série

(50) $$k(\tau, x) + \lambda k_2(\tau, x) + \lambda^2 k_3(\tau, x) + \cdots + \lambda^n k_n(\tau, x) + \cdots$$

est uniformément convergente pour toutes les valeurs de λ. La série

$$k_2(\tau, x) + \lambda^2 k_4(\tau, x) + \cdots + \lambda^l k_{2l}(\tau, x) + \cdots,$$

qu'on obtient en substituant dans la série (50) $-\lambda$ à la place de λ et en faisant la soustraction, est de même convergente pour toutes les valeurs de λ.

Il est de même avec la série

(51) $$\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega + \\ + \lambda^2 \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_4(\tau, x)\, d\omega + \cdots + \lambda^l \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_{2l}(\tau, x)\, d\omega + \cdots$$

et avec la série

(51') $$U_2 + \lambda^2 U_4 + \cdots + \lambda^l U_{2l} + \cdots,$$

où

(52) $$U_{2l} = \left(\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_{2l}(\tau, x)\, d\omega\right)_{\tau=\omega}.$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Schwarz, établie dans le § 4 (2), à la fonction (48) on trouve

$$\frac{1}{\omega^2} U_{2l}^2 \leqq \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_{l+1}^2 (\omega, z)\, d\xi \cdot \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k_{l-1}^2 (\omega, z)\, d\xi$$

c'est-à-dire, d'après (49),

$$\frac{1}{\omega^2} U_{2l}^2 \leqq \frac{1}{\omega} U_{2l+2} \frac{1}{\omega} U_{2l-2},$$

d'où il suit

$$\frac{U_{2l+2}}{U_{2l}} \geqq \frac{U_{2l}}{U_{2l-2}}.$$

Le quotient $\frac{U_{2l}}{U_{2l-2}}$ étant croissant, la série (51') ne peut pas être convergente pour toutes les valeurs de λ.

12. Supposons maintenant que le noyau $k(\tau, x)$ est fini.

Comme la somme de la série (50) est égale dans ce cas à la résolvante

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) : D(\lambda)$$

et comme son rayon de convergence est infini, si $D(\lambda)$ n'a pas de racines, on obtient le *théorème:* si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (C), étant fini, il existe au moins un nombre caractéristique.

Supposons que λ_0 est une racine de $D(\lambda)$ et que l'ordre de cette racine est n. Nous démontrerons, que λ_0 est un pôle ordinaire de la résolvante et qu'à λ_0 correspondent n fonctions fondamentales linéairement indépendantes.

En supposant que l'ordre du pôle λ_0 de la résolvante est supérieur à l'unité, on a dans le voisinage de λ_0

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) : D(\lambda) = \frac{\varphi_0(x)}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{k-1}} + \cdots, \quad \varphi_0(x) \neq 0, \quad k > 1.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (18) on obtient

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0(x) &= \lambda_0 \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, \varphi_0(z)\, d\xi \\ \varphi_1(x) &= \lambda_0 \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, \varphi_1(z)\, d\xi + \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, \varphi_0(z)\, d\xi. \end{aligned} \right.$$

On en déduit, en multipliant la seconde équation par $\varphi_0(x)$ et en l'intégrant, que

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,d\omega = \lambda_0\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_0(x)\left(\int_{(D_z)} k(\xi,x)\,\varphi_1(z)\,d\xi\right)d\omega +$$

$$+\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_0(x)\left(\int_{(D_z)} k(\xi,x)\,\varphi_0(z)\,d\xi\right)d\omega =$$

$$=\lambda_0\int_{(D_z)}\varphi_1(z)\left(\int_{(D_x)} u(\omega)\,k(\xi,x)\,\varphi_0(x)\,d\omega\right)d\xi +$$

$$+\int_{(D_z)}\varphi_0(z)\left(\int_{(D_x)}\varphi_0(x)\left(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,k(\xi,x)\,d\omega\right)d\omega\right)d\xi =$$

$$=\lambda_0\int_{(D_z)}\varphi_1(z)\left(\int_{(D_x)}\varphi_0(x)\left(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,k(\xi,x)\,d\omega\right)d\omega\right)d\xi +$$

$$+\int_{(D_z)}\varphi_0(z)\left(\int_{(D_x)}\varphi_0(x)\left(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\,k(\xi,x)\,d\omega\right)d\omega\right)d\xi =$$

$$=\lambda_0\int_{(D_z)}\varphi_1(z)\left(\int_{(D_x)}\varphi_0(x)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\,k(\omega,z)\,d\xi\right)d\omega\right)d\xi +$$

$$+\int_{(D_z)}\varphi_0(z)\left(\int_{(D_x)}\varphi_0(x)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\,k(\omega,z)\,d\xi\right)d\omega\right)d\xi =$$

$$=\lambda_0\int_{(D_z)}\varphi_1(z)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\left\{\int_{(D_x)} k(\omega,z)\,\varphi_0(x)\,d\omega\right\}d\xi\right)d\xi +$$

$$+\int_{(D_z)}\varphi_0(z)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\left\{\int_{(D_x)} k(\omega,z)\,\varphi_0(x)\,d\omega\right\}d\xi\right)d\xi =$$

$$=\int_{(D_z)}\varphi_1(z)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\,\varphi_0(z)\,d\xi\right)d\xi + \frac{1}{\lambda_0}\int_{(D_z)}\varphi_0(z)\left(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} u(\xi)\,\varphi_0(z)\,d\xi\right)d\xi =$$

$$=\int_{(D_z)} u(\xi)\,\varphi_1(z)\,\varphi_0(z)\,d\xi + \frac{1}{\lambda_0}\int_{(D_z)} u(\xi)\,\varphi_0^2(z)\,d\xi,$$

d'où il suit

$$\int_{(D_z)} u(\xi)\,\varphi_0^2(z)\,d\xi = 0, \quad \varphi_0(z) = 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Nous obtenons ainsi, que λ_0 est une racine d'ordre $n-1$ de la fonction

$$D\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

Envisageons maintenant la fonction

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right). \tag{54}$$

Comme on a

$$\int_{(D_{y_1})} \dots \int_{(D_{y_m})} D\left(\begin{matrix} y_1, \dots y_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\tau_1 \dots d\tau_m = (-1)^m D^{(m)}(\lambda),$$

λ_0 est une racine de (54) ayant un ordre ne surpassant pas $n-m$.

Pour démontrer que cet ordre est égal à $n-m$, supposons, que l'assertion, qui est exacte pour $m=1$, est démontrée pour les mineurs d'ordre moindre que m, et divisons les deux parties de l'égalité (17) par $D^{(m-1)}(\lambda)$.

Suivant la supposition, les termes en partie droite de l'égalité, qui sont hors de l'intégrale, donnent après cette division les fonctions holomorphes dans le voisinage de λ_0.

Si l'on suppose, que dans le voisinage de λ_0 la fonction dans la partie gauche de l'égalité a la forme

$$\frac{\varphi_0(x)}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(\lambda-\lambda_0)^{k-1}} + \cdots, \quad \varphi_0(x) \neq 0, \quad k > 1,$$

on obtient de nouveau les équations (53) et on en conclut, que $\varphi(x_0) = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

Nous obtenons donc le *théorème:* si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (C) et est fini et si λ_0 est une racine d'ordre n de son détérminant de Fredholm $D(\lambda)$, le mineur d'ordre m a λ_0 pour racine d'ordre $n-m$.

Comme corollaire nous avons: à la racine λ_0 d'ordre n du détérminant $D(\lambda)$ correspondent n fonctions fondamentales linéairement indépendantes.

13. Soit $k(\tau, x)$ un noyau, répondant à la condition (C), mais non fini. Supposons qu'un noyau itéré $k_m(\tau, x)$ est fini.

En appliquant les théorèmes du § 12 à l'équation

$$(55)\qquad \varphi(x) = \lambda^m \int_{(D_y)} k_m(\tau, y)\, \varphi(y)\, d\tau + f(x),$$

on voit que tous ses nombres caractéristiques sont réels, qu'il existe un nombre caractéristique au moins et qu'on peut former ses fonctions fondamentales et compter leur nombre ayant égard à l'ordre de multiplicité des racines de la fonction $D(\lambda)$, qui lui correspond.

Si $\varphi(x)$ est une fonction fondamentale continue de l'équation (2)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, y)\, \varphi(y)\, d\tau + f(x),$$

correspondante au nombre caractéristique λ_0, $\varphi(x)$ est la fonction fondamentale de l'équation (55), correspondante au nombre caractéristique λ_0^m.

Il suit des considérations du § 10, que λ_0 est réel; seulement l'existence de λ_0 et de la fonction $\varphi(x)$ n'y était pas encore démontrée.

Nous démontrerons maintenant, que chaque fonction fondamentale de l'équation (55) est une fonction fondamentale de l'équation (2) et que, si elle correspond au nombre caractéristique λ_0^m de l'équation (55), λ_0 étant réel, le nombre caractéristique de l'équation (2), qui lui correspond, est égale à λ_0, si m est impair, et à un des nombres λ_0, $-\lambda_0$, si m est pair.

Supposons, qu'on a

$$\varphi(x) = \lambda_0^m \int_{(D_y)} k_m(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau.$$

Si l'on a

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau + \omega(x),$$

on trouve par le procédé d'itération

$$\varphi(x) = \omega(x) + \lambda_0 \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \omega(y)\, d\tau +$$

$$+ \lambda_0^2 \int_{(D_y)} k_2(\tau, x)\, \omega(y)\, d\tau + \cdots + \lambda_0^{m-1} \int_{(D_y)} k_{m-1}(\tau, x)\, \omega(y)\, d\tau +$$

$$+ \lambda_0^m \int_{(D_y)} k_m(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau.$$

Il suit de là que la fonction $\omega(x)$ satisfait à l'équation

(56)
$$\omega(x) + \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau +$$
$$+ \lambda_0^2 \int\limits_{(D_y)} k_2(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau + \cdots + \lambda_0^{m-1} \int\limits_{(D_y)} k_{m-1}(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau = 0.$$

En mettant dans (56) y, ξ et z à la place de x, τ et y, en multipliant le résultat par $k(\tau, x)$ et en l'intégrant, on trouve, en restituant les lettres x et y,

(56′)
$$\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau +$$
$$+ \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} k_2(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau + \cdots + \lambda_0^{m-1} \int\limits_{(D_y)} k_m(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau = 0.$$

La comparaison des égalités (56) et (56′) nous donne

$$\omega(x) = \lambda_0^m \int\limits_{(D_y)} k_m(\tau, x)\,\omega(y)\,d\tau,$$

d'où il suit que $\omega(x)$ est une fonction fondamentale de l'équation (55), correspondante au nombre caractéristique λ^m_0.

Supposons, que

(57)
$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ \varphi_k(x)$$

sont les fonctions fondamentales de l'équation (55) correspondantes au nombre caractéristique λ_0^m.

Supposons, que les fonctions (57) forment un ensemble normé et orthogonal par rapport à $u(\omega)$, c'est-à-dire qu'on a

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,d\omega = \eta_{i,j}, \quad \eta_{i,j} = 0, \text{ si } i \neq j, \ \eta_{i,i} = 1.$$

Supposons qu'on a

(58)
$$\varphi_i(x) = \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\,\varphi_i(y)\,d\tau + \sum_{l=1}^{l=k} a_l^{(i)}\,\varphi_l(x).$$

En multipliant (58) par $u(\omega)$ et en l'intégrant, on trouve

$$(59) \qquad \varphi_i(\omega) = \lambda_0 \int_{(D_y)} k(\omega, y)\, \varphi_i(\tau)\, d\tau + \sum_{l=1}^{l=k} a_l^{(i)} \varphi_l(\omega),$$

en désignant par

$$\varphi_i(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega)\, \varphi_i(x)\, d\omega$$

la fonction fondamentale de l'équation associée.

En effet on a

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) \left(\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi_i(y)\, d\tau \right) d\omega = \int_{(D_y)} \varphi_i(y) \left(\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) k(\tau, x)\, d\omega \right) d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} \varphi_i(y) \left(\frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau)\, k(\omega, y)\, d\tau \right) d\tau = \int_{(D_y)} u(\tau)\, k(\omega, y)\, \varphi_i(y)\, d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} k(\omega, y)\, \varphi_i(\tau)\, d\tau.$$

En multipliant (58) par $\varphi_j(\omega)$ et en l'intégrant, on trouve

$$\eta_{i,j} = \eta_{i,j} - \sum_{l=1}^{l=k} a_l^{(j)} \eta_{i,l} + \sum_{l=1}^{l=k} a_l^{(i)} \eta_{j,l}, \quad a_i^{(j)} = a_j^{(i)}.$$

En effet, on a suivant (59):

$$\lambda_0 \int_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi_j(x) \left(\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi_i(y)\, d\tau \right) d\omega =$$

$$= \lambda_0 \int_{(D_y)} \varphi_i(y) \left(\int_{(D_x)} k(\tau, x)\, u(\omega)\, \varphi_j(x)\, d\omega \right) d\tau =$$

$$= \lambda_0 \int_{(D_y)} \varphi_i(y) \left(\int_{(D_x)} k(\tau, x)\, \varphi_j(\omega)\, d\omega \right) d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} \varphi_i(y) \left(\varphi_j(\tau) - \sum_{l=1}^{l=k} a_l^{(j)} \varphi_l(\tau) \right) d\tau.$$

En prenant à la place des fonctions (57) leurs combinaisons linéaires, on peut transformer les équations (58) en plusieurs groupes d'équations de la forme

$$(60) \qquad \psi_i(x) = \lambda_0 \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)\, \psi_i(y)\, d\tau + \psi_{i-1}(x) + \omega_r \psi_i(x)$$

$\omega_1, \ldots \omega_r$ étant les différentes racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \omega, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_k^{(1)} \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)} - \omega, & \ldots, & a_k^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(k)}, & a_2^{(k)}, & \ldots, & a_k^{(k)} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Comme on a

$$a_i^{(j)} = a_j^{(i)},$$

les racines de cette équation sont réelles.

Prenons en premier lieu les premières équations de chaque groupe en posant $\omega(x) = \omega \psi_1(x)$. En substituant $\omega(x)$ dans (56) on trouve

$$(61) \qquad \omega \psi_1(x)\,[1 + (1 - \omega) + (1 - \omega)^2 + \cdots + (1 - \omega)^{m-1}] = 0,$$

car si

$$\lambda_0^s \int\limits_{(Dy)} k_s(\tau, x)\, \omega(y)\, d\tau = \omega (1 - \omega)^s \psi_1(x),$$

on a

$$\lambda_0^{s+1} \int\limits_{(D_y)} k_{s+1}(\tau, x)\, \omega(y)\, d\tau =$$

$$= \lambda_0^{s+1} \int\limits_{(D_z)} k_s(\tau, z) \left(\int\limits_{(D_y)} k(z, y)\, \omega(y)\, d\tau \right) d\xi =$$

$$= (1 - \omega)\, \lambda_0^s \int\limits_{(D_z)} k_s(\tau, z)\, \omega(z)\, d\xi.$$

Si m est impair, la seule racine réelle de l'équation (61) est égale à zéro. Dans ce cas on a

$$\psi_1(x) = \lambda_0 \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\, \psi_1(y)\, d\tau.$$

Si m est pair, il y a encore une racine

$$1-\omega=-1, \quad \omega=2;$$

dans ce cas on a

$$\psi_1(x)=\lambda_0\int\limits_{(D_y)} k(\tau,x)\psi_1(y)\,d\tau+2\psi_1(x), \quad \psi_1(x)=-\lambda_0\int\limits_{(D_y)} k(\tau,x)\psi_1(y)\,d\tau.$$

Supposons maintenant qu'on a

$$\omega(x)=\psi_{i-1}(x)+\omega\psi_i(x),$$

ce qui est égal à ψ_{i-1} pour m impair et qu'on peut changer en $\psi_{i-1}(x)$, si $\omega=2$, en mettant $-\lambda_0$ à la place de λ_0 pour m pair. Comme

$$(\pm\lambda_0)^s\int\limits_{(D_y)} k_s(\tau,x)\psi_{i-1}(y)\,d\tau=$$

$$=(\pm\lambda_0)^s\int\limits_{(D_y)}\left(\int\limits_{(D_z)} k(\tau,z)\,k_{s-1}(\xi,x)\,d\xi\right)\psi_{i-1}(y)\,d\tau=$$

$$=(\pm\lambda_0)^{s-1}\int\limits_{(D_z)} k_{s-1}(\xi,x)\,[\psi_{i-1}(z)-(\pm 1)\psi_{i-2}(z)]\,d\xi=$$

$$=(\pm\lambda_0)^{s-1}\int\limits_{(D_z)} k_{s-1}(\tau,x)\psi_{i-1}(z)\,d\tau-$$

$$-(\pm\lambda_0)^s\int\limits_{(D_z)} k_{s-1}(\tau,x)\psi_{i-2}(z)\,d\tau$$

on trouve

$$(\pm\lambda_0)^s\int\limits_{(D_y)} k_s(\tau,x)\psi_{i-1}(y)\,d\tau=\psi_{i-1}(x)-(\pm 1)\binom{s}{1}\psi_{i-2}(x)+$$

$$+(\pm 1)^2\binom{s}{2}\psi_{i-3}(x)-\cdots.$$

La formule (56) conduit donc à l'identité de la forme

$$m\psi_{i-1}-(\pm 1)\binom{m}{2}\psi_{i-2}+(\pm 1)^2\binom{m}{3}\psi_{i-3}-\cdots=0,$$

qui est évidemment impossible, les fonctions ψ étant linéairement indépendantes. Il suit de là, que chaque groupe (60) contient seulement une équation et que le théorème est démontré.

14. Ayant en vue de donner quelques exemples, envisageons l'équation au noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) L(x, y)\, d\tau,$$

dans lequel $L(x, y)$ est symétrique. On peut donner à l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x) \varphi(y)\, d\tau + f(x)$$

la forme

(62) $$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} u(\tau) L(x, y) \varphi(y)\, d\tau + f(x).$$

Supposons qu'on a

$$u(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau),$$

la fonction moyenne $u_1(\tau)$ répondant à la condition (B).

Supposons que pour l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} u_1(\tau) L(x, y) \varphi(y)\, d\tau + f(x)$$

nous connaissons le déterminant de Fredholm et le premier mineur. Désignons les respectivement par

(63) $$\delta(\lambda) \text{ et } \delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)$$

et montrons, quel profit on peut tirer de cette connaisance pour la construction du détérminant de Fredholm et de ses mineurs

(63') $$D(\lambda),\ D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right), \ldots$$

pour l'équation (62).

En se rappelant les formules du § 10, nous avons

$$D\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ \tau_1, \dots \tau_m \end{pmatrix}\lambda\Big) = \frac{1}{\tau_1 \dots \tau_m} \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_m} u(\tau_1) \dots u(\tau_m) D\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix}\lambda\Big) d\tau_1 \dots d\tau_m,$$

où

$$(64) \qquad D\left(\begin{matrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) = L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ \frac{(-\lambda)^k}{1.2\dots k} \int_{(D_{z_1})} \dots \int_{(D_{z_k})} u(\xi_1) \dots u(\xi_k) \cdot L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1 \dots z_k \\ y_1, \dots y_m, z_1 \dots z_k \end{pmatrix} d\xi_1 \cdots d\xi_k + \cdots$$

et

$$(65) \qquad L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_n \\ y_1, \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L(x_1, y_1), & \dots & L(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ L(x_n, y_1), & \dots & L(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Supposons que les nombres $i_1, \dots i_s, j_1, \dots j_{n-s}$ sont différents et ne surpassent pas n. En usant la symétrie de (65) par rapport aux couples (x_i, y_i), posons

$$(66) \int_{(D_{j_1})} \dots \int_{(D_{j_{n-s}})} u(\xi_{j_1}) \dots u(\xi_{j_{n-s}}) L\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_{n-1}, z_n \\ y_1, \dots y_m, z_1, \dots z_{n-1}, z_n \end{pmatrix} d\xi_{j_1} \dots d\xi_{j_{n-s}} =$$

$$= C_{n-s}\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m, z_{i_1}, \dots z_{i_s} \\ y_1, \dots y_m, z_{i_1}, \dots z_{i_s} \end{pmatrix}.$$

La formule (64) reçoit la forme:

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) =$$

$$= \left\{ C_0\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix} + \cdots + \frac{(-\lambda)^k}{1.2\dots k} C_k\begin{pmatrix} x_1, \dots x_m \\ y_1, \dots y_m \end{pmatrix} + \cdots \right\}.$$

Comme on a

$$u(\xi_1) \dots u(\xi_k) = (u_1(\xi_1) + u_2(\xi_1)) \dots (u_1(\xi_k) + u_2(\xi_k)) =$$

$$= \Sigma\, u_2(\xi_{i_1}) \dots u_2(\xi_{i_s}) u_1(\xi_{j_1}) \dots u_1(\xi_{n-s}),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons possibles des nombres

$$i_1, \ldots i_s, \quad s=0, \; s=1, \ldots, \; s=n,$$

on trouve

(67)
$$C_k\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_m \\ y_1, \ldots y_m \end{pmatrix} =$$

$$= \Sigma \int\limits_{(D_{z_{i_1}})} \cdots \int\limits_{(D_{z_{i_s}})} u_2(\xi_{i_1}) \ldots u_2(\xi_{i_s}) \left(\int\limits_{(D_{j_1})} \cdots \int\limits_{(D_{j_{k-s}})} u_1(\xi_{j_1}) \ldots u_1(\xi_{k-s}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot L\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_m, z_1 \ldots z_n \\ y_1, \ldots y_m, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} d\xi_{j_1} \ldots d\xi_{j_{k-s}} \right) d\xi_i \ldots d\xi_{i_s} =$$

$$= \Sigma \int\limits_{(D_{z_{i_1}})} \cdots \int\limits_{(D_{z_{i_s}})} u_2(\xi_{i_1}) \ldots u_2(\xi_{i_s}) \cdot c_{n-s}\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_m, z_{i_1}, \ldots z_{i_s} \\ y_1, \ldots y_m, z_{i_1}, \ldots z_{i_s} \end{pmatrix} d\xi_{i_1} \ldots d\xi_{i_s}$$

en désignant par la lettre c la fonction C correspondante au noyau, $u_1(\omega) L(x, y)$. Comme le terme, qui est écrit dans (67) ne diffère pas de

$$\int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_s})} u_2(\xi_1) \ldots u(\xi_s)\, c_{n-s}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_s \\ y_1 \ldots y_m, z_1 \ldots z_s \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s,$$

on trouve que

$$C_k\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m \\ y_1 \ldots y_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=k} \frac{k!}{s!\,(k-s)!} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_s})} u_2(\xi_1) \ldots u_2(\xi_s)\, c_{n-s}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_s \\ y_1 \ldots y_m, z_1 \ldots z_s \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s.$$

Il suit de là que

$$D\left(\begin{matrix} x_1 \ldots x_m \\ y_1 \ldots y_m \end{matrix} \middle| \lambda \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \sum_{s=0}^{s=k} \frac{k!}{s!\,(k-s)!} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_s})} u_2(\xi_1) \ldots u_2(\xi_s)\, c_{n-s}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_s \\ y_1 \ldots y_m, z_1 \ldots z_s \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^s}{s!} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_s})} u_2(\xi_1) \ldots u_2(\xi_s) \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k-s}}{(k-s)!} c_{n-s}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_s \\ y_1 \ldots y_m, z_1 \ldots z_s \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^s}{s!} \int\limits_{(D_{z_1})} \cdots \int\limits_{(D_{z_s})} u_2(\xi_1) \ldots u_2(\xi_s)\, \delta\left(\begin{matrix} x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_s \\ y_1 \ldots y_m, z_1 \ldots z_s \end{matrix} \middle| \lambda \right) d\xi_1 \ldots d\xi_s$$

et, enfin, que

$$D\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^s}{s!} \underset{(D_{z_1})}{\int} \dots \underset{(D_{z_s})}{\int} u_2(\xi_1) \dots u_2(\xi_s)\, \delta\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_s \\ \tau_1 \dots \tau_m, z_1 \dots z_s \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi_1 \dots d\xi_s =$$

$$= \delta\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \frac{\lambda}{1} \underset{(D_{z_1})}{\int} u_2(\xi_1)\, \delta\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_m, z_1 \\ \tau_1 \dots \tau_m, z_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1.2} \underset{(D_{z_1})}{\int} \underset{(D_{z_2})}{\int} u_2(\xi_1)\, u_2(\xi_2)\, \delta\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_m, z_1, z_2 \\ \tau_1 \dots \tau_m, z_1, z_2 \end{matrix}\right) d\xi_1\, d\xi_2 + \cdots$$

Ainsi, nous avons

$$D(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\lambda}{1} \underset{(D_{z_1})}{\int} u_2(\xi_1)\, \delta\left(\begin{matrix} z_1 \\ z_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) d\xi_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1.2} \underset{(D_{z_1})}{\int} \underset{(D_{z_2})}{\int} u_2(\xi_1)\, u_2(\xi_2)\, \delta\left(\begin{matrix} z_1, z_2 \\ z_1, z_2 \end{matrix}\right) d\xi_1\, d\xi_2 - \cdots$$

$$D\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \delta\left(\begin{matrix} x \\ \tau \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \frac{\lambda}{1} \underset{(D_{z_1})}{\int} u_2(\xi_1)\, \delta\left(\begin{matrix} x, z_1 \\ \tau, z_1 \end{matrix}\right) d\xi_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1.2} \underset{(D_{z_1})}{\int} \underset{(D_{z_2})}{\int} u_2(\xi_1)\, u_2(\xi_2)\, \delta\left(\begin{matrix} x, z_1, z_2 \\ \tau, z_1, z_2 \end{matrix}\right) d\xi_1\, d\xi_2 + \cdots$$

Dans le cas particulier d'une dimension, quand on a

$$\int_a^b u(\tau)\, f(y)\, d\tau = \int_a^b \varphi(y)\, f(y)\, dy + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k),$$

en choisissant $u_2(\tau)$ de manière qu'on ait (exemple 2 du § 1 (1))

$$\int_a^b u_2(\tau) f(y)\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k), \tag{68}$$

nous obtenons, par exemple

$$
(69)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& D(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\lambda}{1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k_1}\, \delta\left(\begin{matrix} a_{k_1} \\ a_{k_1} \end{matrix} \lambda\right) + \\
& + \frac{\lambda^2}{1.2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2}\, \delta\left(\begin{matrix} a_{k_1}, & a_{k_1} \\ a_{k_1}, & a_{k_1} \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \cdots \\
& D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \frac{\lambda}{1} \sum_{k_1=1}^{\infty} \alpha_k\, \delta\left(\begin{matrix} x\, a_k \\ y\, a_k \end{matrix} \middle| \lambda\right) + \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Si la somme dans (68) contient un nombre fini de termes, le nombre des termes dans (69) est également fini.

Remarquons encore, qu on a

$$
D\left(\begin{matrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{matrix} \middle| \lambda\right) D(\lambda) = \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), & D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ D\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), & D\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \middle| \lambda\right) \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_1 \dots x_m \\ y_1 \dots y_m \end{matrix} \middle| \lambda\Big) D^{m-1}(\lambda) = \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), & \dots & D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ D\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), & \dots & D\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ D\left(\begin{matrix} x_m \\ y_1 \end{matrix} \middle| \lambda\right), & \dots & D\left(\begin{matrix} x_m \\ y_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) \end{vmatrix}
$$

15. Pour donner un exemple, prenons le problème des «Belastete Integralgleichungen».*

Prenons l'exemple de M. Kneser, emprunté à «The Theorie of Sound» de Lord Rayleight.** Pour simplifier, posons, comme le fait M. Kneser, qu'une corde vibrante est attachée d'un côté et retenue par un poids de l'autre. Les équations qui régissent le mouvement dans ce cas sont les suivantes.

* Kneser. Rendiconti di Palermo, t. 37, 1914, «Belastete Integralgleichungen.»

** Vol. 1, p. 200, ed. 1926.

Dans les points intérieurs

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

sur l'extrémité fixe

$$u(\omega, t) = 0,$$

sur l'extrémité avec poids

$$M u''_{xx}(b,t) + c^2 u(b,t) = -T u'_x(b,t),$$

où T est la torsion de la corde, M sa masse, c^2 un coefficient d'élasticité.

De plus, dans le moment initial la forme de la corde est donnée:

$$\text{si } t = 0: \; u(x,0) = F_1(x), \; u'_t(x,0) = F_2(x).$$

Si l'on cherche à satisfaire au problème comme d'ordinaire par la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x),$$

dans laquelle les fonctions $T_k(t)$ dépendent seulement du temps t et les fonctions $v_k(x)$ seulement de l'abscisse x, on trouve pour les fonctions $T_k(t)$ les équations

$$T_k'' + \rho_k^2 a^2 T_k = 0$$

et pour les fonctions $v_k(x)$ correspondantes aux équations

(70) $$v_k''(x) + \rho_k^2 v_k(x) = 0,$$

dans lesquelles les inconnues $v_k(x)$ sont assujetties aux conditions

(71) $$v_k(0) = 0, \; v_k'(b) + (p - q\rho_k^2) v_k(b) = 0, \; p = \frac{c^2}{T}, \; q = \frac{Ma^2}{T}.$$

En cherchant la règle, qu'on peut substituer dans ce cas à la place d'orthogonalité de la suite des fonctions $v_k(x)$, on trouve sans peine

(72) $$\int_0^b v_m(x) v_k(x)\, dx + q\, v_m(b) v_k(b) = 0, \; m \neq n.$$

Introduisons la fonction moyenne $u(\omega)$ des intervalles (α, β):

$$u(\omega) = 1 + w(\omega),$$

ou (ω) est l'intervalle (α, β) et

$$w(\omega) = 0, \text{ si } \beta < b, \quad w(\omega) = \frac{q}{\omega}, \text{ si } \beta = b.$$

En se rappelant l'exemple 2 du § 1 (1), on voit que l'égalité (72) a la forme

$$(72') \qquad \int_0^b u(\omega)\, v_m(x)\, v_n(x)\, d\omega = 0.$$

Cherchons la solution de l'équation

$$V'' = 0$$

assujettie aux conditions ordinaires

$$(73) \qquad v_k(0) = 0, \quad v_k'(b) + p\, v_k(b) = 0.$$

La fonction de Green $k(x, y)$ répondante à ces conditions est

$$\frac{x[1 + p(b - y)]}{1 + pb}, \quad \text{si } x < y, \qquad \frac{y[1 + p(b - x)]}{1 + pb}, \quad \text{si } x > y.$$

Les fonctions fondamentales de l'équation

$$(74) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^b u(\tau)\, k(x, y)\, \varphi(y)\, d\tau + f(x)$$

répondent à la condition (72'). Il s'agit maintenant de s'assurer qu'elles répondent aux conditions (71). Il suit de l'égalité

$$v_k(x) = \rho_k^2 \int_0^b u(\tau)\, k(x, y)\, v_k(y)\, d\tau =$$

$$= \rho_k^2 \int_0^b k(x, y)\, v_k(y)\, dy + \rho_k^2\, q\, k(x, b)\, v_k(b),$$

qu'on a

$$v_k'(x) + pv_k(x) =$$

$$= \rho_k^2 \int_0^b (k_x'(x,y) + pk(x,y))\, v_k(y)\, dy + \rho_k^2 q\, (k_x'(x,b) + p\, k(x,b))\, v_k(b);$$

comme pour chaque y on a

$$k_x'(b,y) + pk(b,y) = 0,$$

il suit de là en premier lieu, que

$$v_k'(b) + p\, v_k(b) = \rho_k^2 q\, (k_x'(b-0,b) + k(b-0,b))\, v_k(b)$$

et que

$$k_x'(b, b-0) + pk(b, b-0) = 0$$

ou

$$k_x'(b+0, b) + pk(b+0, b) = 0.$$

Or on a

$$k_x'(y+0, y) - k_x'(y-0, y) = -1;$$

il suit de là que

$$(k_x'(y+0, y) + pk(y+0, y)) - (k_x'(y-0, y) + pk(y-0, y)) = -1$$

et que, en limite,

$$(k_x'(b+0,b) + pk(b+0,b)) - (k_x'(b-0,b) + pk(b-0,b)) =$$
$$= -k_x'(b-0,b) + pk(b-0,b)) = -1.$$

On en conclut, que

$$v_k'(b) + pv_k(b) = \rho_k^2 q v_k(b),$$

ce qui était à démontrer.

En cherchant la résolvante $\gamma(x, y, \rho)$ de l'équation

$$\varphi(x) = \rho^2 \int_0^b k(x,y)\, \varphi(y)\, dy + f(x)$$

qui est égale à la fonction de Green de l'équation

$$v'' + \rho^2 v = 0$$

assujettie aux conditions (73), on trouve sans peine

$$\gamma(x, y, \lambda) = \frac{\sin \rho x [\rho \cos \rho (b - y) + p \sin \rho (b - y)]}{\rho (\rho \cos \rho b + p \sin \rho b)},$$

si

$$x < y; \quad \gamma(x, y, \lambda) = \gamma(y, x, \lambda).$$

En posant $\lambda = \rho^2$ et

$$\delta(\lambda) = \Phi(\rho), \quad \frac{\Phi'(\rho)}{\Phi(\rho)} = \frac{\delta(\lambda)}{\delta'(\lambda)} 2\rho$$

et en cherchant le détérminant de Fredholm suivant la formule

$$\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\int_0^b \gamma(x, x, \rho)\, dx, \quad \delta(0) = 1$$

on trouve sans peine

$$\delta(\lambda) = \frac{\rho \cos(\rho b) + p \sin(\rho b)}{\rho}$$

d'où suit qu'on a

$$\delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right) = \frac{\sin \rho x [\rho \cos \rho (b - y) + p \sin \rho (b - y)]}{\rho^2},$$

$$x < y, \quad \delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right) = \delta\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \middle| \rho^2\right).$$

L'application des formules du § 14 donne maintenant

$$D(\rho^2) = \delta(\rho^2) - \rho^2 \int_0^b w(\tau)\, \delta\left(\begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\tau = \delta(\rho^2) - q \rho^2 \delta\left|\begin{matrix} b \\ b \end{matrix}\middle| \lambda\right) =$$

$$= \frac{\rho \cos(pb) + p \sin(pb)}{\rho} - q\rho \sin \rho b = \frac{\rho \cos(\rho b) + (p - q\rho^2) \sin(\rho b)}{\rho},$$

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right) = \delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right) - \rho^2 q \begin{vmatrix} \delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right), & \delta\left(\begin{matrix} x \\ b \end{matrix} \middle| \rho^2\right) \\ \delta\left(\begin{matrix} b \\ y \end{matrix} \middle| \rho^2\right), & \delta\left(\begin{matrix} b \\ b \end{matrix} \middle| \rho^2\right) \end{vmatrix} : \delta(\rho^2) =$$

$$= \frac{\sin(\rho x) [\rho \cos \rho (b - y) + p \sin \rho (b - y)]}{\rho^2} - q \sin \rho x \sin \rho (b - y), \text{ si } x < y.$$

Il suit de là que les nombres caractéristiques de l'équation (74) sont donnée par l'équation

$$\operatorname{tg} \rho b = \frac{\rho}{q\rho^2 - p}$$

et qu'au nombre ρ_m correspond une fonction fondamentale $v_m(x)$ égale à

$$c \sin \rho_m x,$$

où c est définie par l'équation

$$c^2 \int_0^b u(\omega) \sin^2 \rho_m x \, d\omega = 1,$$

c'est-à-dire où

$$c^2 = \frac{1}{\frac{b}{2} - \frac{1}{\rho_m} \sin 2\rho_m b + q \sin^2 \rho_m b}.$$

Pour trouver la fonction $u(x, t)$ il reste encore à développer les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$ en séries suivant les fonctions $v_m(x)$. Nous traiterons la théorie de dévéloppement pareil dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

Sur les développements suivant les fonctions fondamentales

1. Nous supposerons toujours, que le noyau $k(\tau, x)$ répond aux conditions:

A) 1) la fonction $k(\tau, x)$ est une fonction continue de (x) pour chaque choix du domaine (τ), 2) la borne totale de la fonction moyenne $k(\tau, x)$ est bornée comme fonction de (x);

C) pour chaque choix des domaines (ω) et (τ) on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) k(\tau, x) \, d\omega = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) k(\omega, y) \, d\tau,$$

$u(\omega)$ étant une fonction moyenne à variation bornée, qui est toujours positive.

Rappelons que le noyau $k(\tau, x)$ est dit fini, s'il répond aux deux conditions:

α) pour chaque choix du point (x) on a

$$|k(\tau, x)| < V_1(\tau), \tag{2}$$

$V_1(\tau)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée,

β) à chaque nombre positif ε correspond un nombre ρ tel que, les points (x') et (x'') appartenant à une même sphère du rayon ρ, on a

$$|k(\tau, x'| - k(\tau, x'')| < \varepsilon V_2(\tau),$$

$V_2(\tau)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée, ou aux conditions un peu plus générales du § 15 (2). Dans ce dernier cas, cependant, nous supposerons que $u(\omega)$ est absolument continue dans un domaine (δ_0) contenant l'ensemble (E).

Nous dirons, que le noyau $k(\tau, x)$ satisfait à la condition (D), si l'on a

$$\int_{(D_x)} u(\omega) k^2(\tau, x)\, d\omega < C^2 u^2(\tau). \tag{3}$$

La condition (D) est satisfaite si le noyau $k(\tau,x)$ étant fini, on a

$$V_1(\tau) < au(\tau), \tag{4}$$

a étant un nombre déterminé. Si l'inégalité (4) a lieu, nous dirons que la condition (D) est strictement satisfaite.

Si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), les noyaux itérés répondent strictement à cette condition. En effet, on a

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega) k_2(\tau, x)\, d\omega = \int_{(D_z)} u(\xi) k(\tau, z) k(\omega, z)\, d\xi \tag{5}$$

en désignant par (ξ) les domaines des points (z), d'où suit

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega) k_2(\tau, x)\, d\omega\right|^2 < \int_{(D_z)} u(\xi) k^2(\tau, z)\, d\xi \cdot$$

$$\int_{(D_z)} u(\xi) k^2(\omega, z)\, d\xi < C^4 u^2(\tau) u^2(\omega)$$

et

$$\left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u'(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega\right| < C^2 u(\tau)\, u(\omega).$$

En supposant que le domaine (ω) contient le point donné (x) et en faisant tendre (ω) vers zéro, on trouve

$$\lim \frac{\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega}{u(\omega)} = \lim \frac{u(\omega)\, k_2(\tau, x')}{u(\omega)} = k_2(\tau, x)$$

et

$$k_2(\tau, x) < C^2 u(\tau).$$

Pour les noyaux $k_l(\tau, x)$, on démontre cette égalité pas à pas en usant l'égalité (5) généralisée:

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x)\, d\omega = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, k_{l-1}(\omega, z)\, d\xi$$

qu'on obtient facilement en remarquant que

$$\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\omega, z)\, k_{l-1}(\tau, z)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)}\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi)\, k(\omega, z)\, d\xi\right) k_{l-1}(\tau, z)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)}\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\xi, x)\, d\omega\right) k_{l-1}(\tau, z)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\left(\int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, k_{l-1}(\tau, z)\, d\xi\right) d\omega.$$

Inversement, si le noyau $k_2(\tau, x)$ répond strictement à la condition (D), le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D). On a, en effet, dans ce cas

$$\left|\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, k(\omega, z)\, d\xi\right| < C u(\omega)\, u(\tau),$$

d'où on obtient l'inégalité (3) en faisant $(\omega) = (\tau)$.

En envisageant un noyau $k(\tau, x)$, répondant aux conditions (A) et (C) qui n'est pas fini, nous supposerons toujours qu'un de ses noyaux itérés est fini.

2. Si le noyau $k(\tau, x)$ répond aux conditions (A) et (C) et si un de ses noyaux itérés est fini, on peut trouver une suite des nombres caractéristiques

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \quad |\lambda_n| \leqq |\lambda_{n+1}| \tag{6}$$

tels, que pour chacun d'entre eux l'équation

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi_k(y)\, d\tau \tag{7}$$

ait des solutions.

La suite (6) contient au moins un nombre; tous les nombres (6) sont réels. En choisissant convenablement les solutions des équations (7) on peut faire correspondre à la suite des nombres caractéristiques (6) la suite des fonctions fondamentales,

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \ldots \tag{8}$$

qui est normale et orthogonale, c'est-à-dire répond aux conditions

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, d\omega = 0, \quad \text{si } n \neq m \tag{9}$$

et

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi_n^2(x)\, d\omega = 1.$$

Les fonctions moyennes de la suite

$$\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau), \ldots \tag{8'}$$

où on a

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, \varphi_n(y)\, d\tau \tag{10}$$

forment les solutions de l'équation associée à l'équation (7):

$$(7') \qquad \varphi_k(\tau) = \lambda_k \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)\, \varphi_k(\omega)\, d\omega.$$

3. Supposons que le noyau $k(\tau, x)$ répond seulement aux conditions (A) et (C). Soit donnée une fonction continue $f(x)$. Formons la série de Fourier qui lui correspond

$$f(x) \sim c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x) + \cdots$$

en posant

$$c_k = \int\limits_{(D_x)} u(\omega) f(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega$$

Comme on a

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega) \left[f(x) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(x) \right]^2 d\omega \geqq 0$$

on démontre comme d'ordinaire, que

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k^2 \leqq \int\limits_{(D_x)} u(\omega) f^2(x)\, d\omega < A^2 u(D_x) D_x$$

A étant la borne supérieure de la fonction $|f(x)|$.

L'inégalité de Bessel étant ainsi démontrée, on voit que la série

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2 + \cdots$$

est toujours convergente.

Si l'on applique celà au noyau $k(\tau, x)$, on trouve

$$c_k = \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)\, \varphi_k(\omega)\, d\omega = \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}.$$

Ainsi la série

$$(11) \qquad \frac{\varphi_1^2(\tau)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(\tau)}{\lambda_2^2} + \cdots + \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} + \cdots$$

est toujours convergente et on peut écrire

$$(11') \qquad \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} < \varepsilon^2,$$

si

$$n \geqq N_\tau$$

N_τ étant un nombre dépendant de (τ). On a, de plus, pour chaque valeur de n:

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} < \int_{(D_x)} u(\omega) k^2(\tau, x)\, d\omega.$$

Envisageons maintenant la série

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}.$$

On trouve

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(\omega)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^2}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2} \cdot \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2}$$

d'où il suit qu'on a

$$\left|\sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\right| < \sqrt{\int_{(D_y)} u(\tau) k^2(\omega, y)\, d\tau} \cdot \varepsilon, \quad n \geqq N_\tau,$$

N_τ étant un nombre dépendant de (τ). Si $k(\tau, x)$ est fini, on a

$$\left|\sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\right| < \sqrt{B}\, V_1(\omega)\, \varepsilon, \quad n \geqq N_\tau.$$

On peut conclure de là que si le noyau $k(\tau, x)$ est fini, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2},$$

qui est absolument convergente, converge uniformément comme fonction de (ω) (si (τ) a une valeur donnée) et comme fonction de τ (si (ω) a une valeur donnée).

Pour s'assurer, il suffit de démontrer le lemme suivant:

Lemme. Étant donnée la série

$$(14) \qquad c_1 v_1(\omega) + c_2 v_2(\omega) + \cdots + c_n v_n(\omega) + \cdots$$

où les fonctions moyennes $v_k(\omega)$ sont additives et à variation bornée, si l'on a

$$(15) \qquad \left| \sum_{k=n}^{k=m} c_k v_k(\omega) \right| < \varepsilon V(\omega),$$

pour

$$n \geqq N,$$

le nombre N étant indépendant de (ω) et $V(\omega)$ une fonction additive et à variation bornée, la série est uniformément convergente.

En effet, en introduisant le terme complémentaire de la série (14)

$$r_n(\omega) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k v_k(\omega)$$

on trouve, en faisant dans (15) m tendre vers l'infini, que

$$|r_m(\omega)| < \varepsilon V(\omega)$$

pour

$$n \geqq N.$$

Si (ω_1), (ω_2), . . . (ω_s) sont les portions de (ω), on a

$$\sum_{i=1}^{i=s} |r_n(\omega_i)| \, \omega_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{i=s} V(\omega_i) \, \omega_i = \varepsilon V(\omega) \, \omega.$$

On conclut de là que, $R_n(\omega)\,\omega$ étant la variation totale de $r_n(\omega)$,

$$R_n(\omega)\,\omega < \varepsilon V(\omega)\,\omega < \varepsilon V(D_x) D_x$$

pour

$$n \geqq N,$$

d'où suit, suivant la définition du § 5 (2), la convergence uniforme de la série (14).

4. Si on suppose que le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D) on trouve

$$(12') \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} < Cu^2(\tau).$$

Or, quelque soit le point (y), si le domaine (τ) le contenant tend vers zéro, on a

$$(\tau) \to 0, \lim \frac{\varphi_k(\tau)}{u(\tau)} = \lim \frac{u(\tau)\varphi_k(y')}{u(\tau)} = \lim \varphi_k(y') = \varphi_k(y),$$

le point (y') étant situé dans (τ); en effet, les valeurs de $u(\tau)$ étant positives, on peut appliquer a l'intégrale $\varphi_k(\tau)$ le théorème 5 du § 4 (2).

A cause de celà l'inégalité (12′) nous conduit à l'inégalité

$$(12_1') \qquad \sum_{n=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^2} < C^2$$

qui montre que la série

$$(16) \qquad \frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(x)}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} + \dots$$

est convergente et qu'on peut écrire

$$(17) \qquad \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} < \varepsilon^2,$$

si

$$n \geqq N_x:$$

N_x étant un nombre dépendant de (x).

Remarquons que des inégalités (12) et $(12_1')$ on conclut, entre autres, que

$$\left|\frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < C, \quad \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| < C.$$

En continuant de supposer, que le noyau répond à la condition (D), envisageons la série

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}.$$

On trouve

$$(19) \qquad \left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(x)|\,|\varphi_k(y)|}{\lambda_k^2}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^2}.$$

En utilisant les inégalités $(12_1')$ et (17), on trouve

$$(19') \qquad \sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(x)|\,|\varphi_k(y)|}{\lambda_k^2} < \varepsilon C,$$

si

$$n \geqq N_x.$$

La série (18) est donc absolument et uniformément convergente comme fonction de (y) (le point (x) étant donné) et à cause de la symétrie, comme fonction de (x) (le point (y) étant donné).

Il suit de l'inégalité (19′) qu'on a

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k)(x)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^2} < C\varepsilon u(\tau),$$

si

$$n \geqq N_x.$$

La dernière inégalité montre que la série

$$(18') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}$$

est uniformément et absolument convergente, comme fonction de (τ) et que sa somme est égale à

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L(x, y)\, d\tau,$$

$L(x, y)$ étant la somme de la série (18). En utilisant l'inégalité (11′) on obtient

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(x)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^2}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} < C^2 \varepsilon^2,$$

si

$$n \geqq N_\tau;$$

la série (18') est uniformément convergente comme fonction de (x) (le domaine (τ) étant donné).

5. *Théorème.* Si la fonction moyenne $l(\tau, x)$ est finie et répond à la condition (C), l'intégrale

$$\int_{(D_x)} \int_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\, d\omega$$

n'est pas négative.

Supposons, en premier lieu, que la fonction $l(\tau, x)$ vérifie les conditions du § 14 (2). On a

$$\int_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(\tau_k)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \left(l_1(\tau_k, x)\, l(\omega, y_k') - l_2(\tau_k, x)\, l(\omega, y_k'')\right) \tau_k,$$

$l_1(\tau, x)$ et $l_2(\tau, x)$ étant les parties positive et négative de $l(\tau, x)$ pour la position choisie de (x) et les points (y_k') et (y_k'') étant situés dans (τ_k), mais ayant une position dépendant éventuellement du choix de (ω) et de (x).

Or, si les domaines (τ_k) peuvent être enfermés dans les sphères (ρ), on a

$$|l(\omega, y_k') - l(\omega, y_k)| < \varepsilon V_2(\omega), \quad |l(\omega, y_k'') - l(\omega, y_k)| < \varepsilon V_2(\omega),$$

le point (y_k) étant choisi arbitrairement dans (τ_k). Il suit de là, que

$$|l_1(\tau_k, x)\left(l(\omega, y_k') - l(\omega, y_k)\right) - l_2(\tau_k, x)\left(l(\omega, y_k'') - l(\omega, y_k)\right)| \tau_k <$$
$$< \varepsilon V_2(\omega)\left(l_1(\tau_k, x) + l_2(\tau_k, x)\right) < \varepsilon V_2(\omega)\, V_1(\tau_k)\, \tau_k$$

et que

$$\int_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau = \sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x)\, l(\omega, y_k)\, \tau_k + \theta \varepsilon V_2(\omega)\, V_1(D_y)\, D_y, \; |\theta| < 1.$$

La fonction

$$\int_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau$$

est finie comme fonction de (x) et de (ω). En effet on a

$$\left|\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\right| < \int\limits_{(D_y)} V_1(\tau)\, V_1(\omega)\, d\tau < V_1(\omega)\, V_1(D_y)\, D_y;$$

$$\left|\int\limits_{(D_y)} (l(\tau, x') - l(\tau, x''))\, l(\omega, y)\, d\tau\right| <$$

$$< \varepsilon \int\limits_{(D_y)} V_2(\tau)\, V_1(\omega)\, d\tau < \varepsilon V_1(\omega)\, V_2(D_y)\, D_y.$$

On a donc, si les (ω_l) sont suffisamment petits:

$$\int\limits_{(D_x)} \Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau \Big) d\omega =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=n} \Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x_l)\, l(\omega_l, y)\, d\tau \Big) \omega_l + \theta_1 \varepsilon, \quad |\theta_1| < 1.$$

Il suit de là, que

$$\int\limits_{(D_x)} \Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau \Big) d\omega =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x_l)\, l(\omega_l, y_k)\, \omega_l \tau_k + \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \varepsilon V_1(D_y)\, V_2(D_x)\, D_x\, D_y$$

ou

$$(20) \qquad \int\limits_{(D_x)} \Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau \Big) d\omega = \sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x_l)\, l(\omega_l, y_k)\, \omega_l \tau_k + B\varepsilon,$$

B étant un nombre détérminé et les points (x_l) étant choisis arbitrairement dans (ω_k), les points (y_k) — dans (τ_k).

L'inégalité (20) subsiste, quand la fonction $l(\tau, x)$ est définie par les conditions du § 15 (2).

Ayant choisi un nombre ε, enfermons l'ensemble (E) dans le domaine (δ_y), tel qu'on ait

$$V_1(\delta_y)\, \delta_y < \varepsilon.$$

En décomposant les domaines (D_x) et (D_y) en domaines (ω_l) et (τ_k), décomposons séparément les domaines $(D_x - \delta_x)$, $(D_y - \delta_y)$ et (δ_x), (δ_y).

En établissant les inégalités préliminaires il faut maintenant distinguer deux cas.

Si (ω) appartient à $(D_x - \delta_x)$ on a

$$|l_1(\tau_k, x)(l(\omega, y_k') - l(\omega, y_k)) - l_2(\tau_k, x)(l(\omega, y_k'')) - l(\omega, y_k))|\tau_k < \\ < \varepsilon V_2^{(\delta)}(\omega) V_1(\tau_k)\tau_k$$

et

$$\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x) l(\omega, y) d\tau = \sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x) l(\omega, y_k)\tau_k + \theta\varepsilon V_2^{(\delta)}(\omega) V_1(D_y) D_y, \\ |\theta| < 1.$$

Si (ω) appartient à (δ_x) on a

$$|l_1(\tau_k, x)(l(\omega, y_k') - l(\omega, y_k)) - l_2(\tau, x)(l(\omega, y_k'') - l(\omega, y_k))|\tau_k < \\ < 2V_1(\omega)\,\omega\, V_1(\tau_k)\tau_k$$

et

$$\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x) l(\omega, y) d\tau = \sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x) l(\omega, y_k)\tau_k + 2\theta V_1(\omega)\,\omega\, V_1(D_y) D_y.$$

La fonction

$$\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x) l(\omega, y) d\tau,$$

étant finie, répond aux conditions du § 14 (2). En effet, quelque soit (ω)

$$\left|\int\limits_{(D_y)} (l(\tau, x') - l(\tau, x'')) l(\omega, y) d\tau\right| \leqq \left|\int\limits_{(D_y - \delta_y)} (l(\tau, x') - l(\tau, x'')) l(\omega, y) d\tau\right| + \\ + \left|\int\limits_{(\delta_y)} (l(\tau, x') - l(\tau, x'')) l(\omega, y) d\tau\right| < V_1(\omega)\varepsilon V_2^{(\delta)}(D_y - \delta_y)(D_y - \delta_y) + \\ + 2V_1(\omega) V_1(\delta_y)\delta_y < \varepsilon a V_1(\omega),$$

a étant un nombre déterminé.

On conclut de tout cela, que

$$\int\limits_{(D_x)}\Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\Big)d\omega = \int\limits_{(D_x-\delta_x)}\Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\Big)d\omega +$$

$$+\int\limits_{(\delta_x)}\Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\Big)d\omega = \sum_{l=1}^{l=n}\sum_{k=1}^{k=m} l(\tau_k, x_l)\, l(\omega_l, y_k)\, \omega_l \tau_k + \theta_1 \varepsilon +$$

$$+ \theta\varepsilon V_2^{(\delta)}(D_x - \delta_x)(D_x - \delta_x)\, V_1(D_y) D_y + 2\theta\, V_1(\delta_x)\delta_x\, V_1(D_y) D_y,$$

ce qui conduit à l'égalité (20).

Passons maintenant à la demonstration du théorème. La condition (C) étant satisfaite, on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, l(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, l(\omega, y)\, d\tau$$

et les valeurs $u(\omega)$ étant positives, on a

(21) $$u(\omega_l)\, l(\tau_k, x_{k,l}) = u(\tau_k)\, l(\omega_l, y_{l,k}),$$

les points $(x_{k,l})$ et $(y_{l,k})$ étant respectivement dans (ω_l) et (τ_k), ayant éventuellement les positions dépendantes des (τ_k) et (ω_l).

En nous servant de (21), posons

$$\frac{l(\tau_k, x_{k,l})}{u(\tau_k)} = \frac{l(\omega_l, y_{l,k})}{u(\omega_l)} = T_{l,k}$$

$$l(\tau_k, x_{k,l}) = T_{l,k}\, u(\tau_k), \quad l(\omega, y_{l,k}) = T_{l,k}\, u(\omega_l).$$

L'égalité (20) prend la forme

$$\int\limits_{(D_x)}\Big(\int\limits_{(D_y)} l(\tau, x)\, l(\omega, y)\, d\tau\Big)d\omega = \sum_{l=1}^{l=n}\sum_{k=1}^{k=m} T^2_{l,k} u(\omega_l)\, u(\tau_k)\, \omega_l \tau_k + B\varepsilon,$$

d'où suit que l'intégrale considérée ne peut pas être négative.

Si nous supposons maintenant, que le noyau $k\ (\tau, x)$ est fini et répond à la condition (C), la fonction

$$l(\tau, x) = k(\tau, x) - \left\{\frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(\tau)}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)\,\bar{\varphi}_n(\tau)}{\lambda_n}\right\}$$

satisfait aux conditions du théorème; on a, en effet,

$$|l(\tau, x)| < |k(\tau, x)| + \sum_{k=1}^{k=n} \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| |\varphi_k(\tau)| < V_1(\tau) + A^2 au(\tau)$$

A étant le maximum de $|\varphi_k(x)|$ pour $k = 1, 2, \ldots n$ et a surpassant la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{|\lambda_k|};$$

de même, les fonctions $\varphi_k(x)$ étant continues, on a, pour les points d'une sphère suffisamment petite

$$|l(\tau, x') - l(\tau, x'')| < \varepsilon V_2(\tau) + a\varepsilon Au(\tau)$$

ou, si $k(\tau, x)$ répond aux conditions du § 15 (2) et (τ) appartient à $(D_y - \delta_y)$,

$$|l(\tau, x') - l(\tau, x'')| < \varepsilon V_2^{(\delta)}(\tau) + a\varepsilon Au(\tau),$$

$u(\tau)$ étant absolument continue, quand (τ) appartient à (δ).

Comme

$$0 \leqq \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} l(\tau, x) l(\omega, y)\, d\tau\, d\omega =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \left(k(\tau, x) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} \right) \left(k(\omega, y) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(y)\varphi_k(\omega)}{\lambda_k} \right) d\omega\, d\tau =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} k(\tau, x) k(\omega, y)\, d\omega\, d\tau - \sum_{k=1}^{n} \int_{(D_y)} \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k} \left(\int_{(D_x)} k(\tau, x)\varphi_k(\omega)\, d\omega \right) d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(D_x)} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \left(\int_{(D_y)} k(\omega, y)\varphi_k(\tau)\, d\tau \right) d\omega +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{\lambda_k \lambda_l} \int_{(D_x)} \varphi_k(x)\varphi_l(\omega)\, d\omega \int_{(D_y)} \varphi_l(y)\varphi_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} k(\tau, x) k(\omega, y)\, d\omega\, d\tau - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\lambda_k^2},$$

on voit, que

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\lambda_k^2} \leqq \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} k(\tau, x) k(\omega, y) d\omega\, d\tau,$$

d'où suit que la série

$$(22) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$$

est convergente pour chaque noyau répondant à la condition (C) sous la seule condition qu'il soit fini.

Il suit de là que pour les noyaux qui sont finis, les séries

$$(23) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\omega)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}, \quad l \geqq 3$$

sont absolument et uniformément convergentes comme fonctions de (ω) et de (τ).

On a, en effet, pour $l = 3$ d'après (12)

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(\omega)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^3}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^4} \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} <$$

$$< \int_{(Dx)} u(\omega) k^2(\tau, x) d\omega \int_{(D_y)} u(\tau) k^2(\omega, x) d\tau \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} <$$

$$< V_1^2(\tau) V_1^2(\omega) u^2(D_x) D_x^2 \varepsilon^2,$$

si

$$n \geqq N,$$

N étant un nombre, indépendant de (ω) et de (τ) et tel que

$$\frac{1}{\lambda_n^2} < \varepsilon^2,$$

pour

$$n \geqq N.$$

On a donc

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(\omega)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^3} < \varepsilon V_1(\tau)\, V_1(\omega)\, u(D_x)\, D_x$$

pour

$$n \geqq N$$

et on achève la démonstration en appliquant le lemme du § 3.

Si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), chaque série

$$(24) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}, \quad l \geqq 3$$

est absolument et uniformément convergente comme fonction de (x) et de (y).

Il suit de là, que chaque série

$$(25) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}, \quad l \geqq 3$$

est absolument et uniformément convergente comme fonction de (x) et de (τ) et que sa somme est égale à

$$(25') \qquad \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau)\, L_l(x, y)\, d\tau$$

L_l étant la somme de la série (24).

De l'inégalité

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(x)|\,|\varphi_k(y)|}{\lambda_k^l} < \varepsilon,$$

si

$$n \geqq N,$$

où le nombre N est indépendant de (x) et de (y), on obtient évidemment l'inégalité

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{|\varphi_k(x)|\,|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k^l} < \varepsilon\, u(\tau),$$

si

$$n \geqq N.$$

6. Nous avons démontré dans le § 9 (3), que si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (C), tous les noyaux itérés $k_l(\tau, x)$ répondent aussi à cette condition.

Lemme. Si le noyau itéré $k_m(\tau, x)$ est fini, tous les noyaux $k_s(\tau, x)$, où $s \geqq 2m$, le sont aussi.

Si l'on a pour les points d'une sphère (ρ):

$$|k_m(\tau, x)| < V_1(\tau), \quad |k_m(\tau, x') - k_m(\tau, x'')| < \varepsilon V_2(\tau)$$

ou

$$< \varepsilon V_2^{(\delta)}(\tau),$$

on a en premier lieu

$$(26) \qquad |k_{m+i}(\tau, x)| < C_i V_1(\tau).$$

En effet, comme

$$k_{m+1}(\tau, x) = \int_{(D_z)} k_m(\tau, z) k(\xi, x) d\xi,$$

on a

$$|k_{m+1}(\tau, x)| < V_1(\tau) B,$$

B étant un nombre surpassant la borne totale de $k(\tau, x)$. En répétant ce raisonnement on démontre pas à pas l'inégalité (26).

En second lieu si $s > 2m$, on a

$$k_s(\tau, x) = \int_{(D_z)} k_{s-m}(\tau, z) k_m(\xi, x) d\xi$$

et

$$|k_s(\tau, x') - k_s(\tau, x'')| = \left| \int_{(D_z)} k_{s-m}(\tau, z) \left(k_m(\xi, x') - k_m(\xi, x'')\right) d\xi \right| <$$

$$< C_{s-2m} V_1(\tau) \varepsilon V_2(D_x) D_x$$

ou

$$|k_s(\tau, x') - k_s(\tau, x'')| \leq \left| \int_{(D_z - \delta)} k_{s-m}(\tau, z) \left(k_m(\xi, x') - k_m(\xi, x'')\right) d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_{(\delta)} k_{s-m}(\tau, z) \left[k_m(\xi, x') - k_m(\xi, x'')\right) d\xi \right| <$$

$$< C_{s-2m} V_1(\tau) \varepsilon V_2^{(\delta)}(D_x - \delta)(D_x - \delta) + C_{s-2m} V_1(\tau) 2 V_1(\delta) \delta < B \varepsilon V_1(\tau).$$

Théorème. Si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}} \tag{25}$$

est absolument et uniformément convergente comme fonction de (x) (le domaine (τ) étant donné) et comme fonction de (τ) (le point (x) étant donné) et si un des noyaux itérés $k_m(\tau, x)$ répond à la condition (D), on a

$$k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}}, \qquad k_s(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{s}}, \qquad s > l. \tag{27}$$

Addition. Si la somme (25) contient un nombre limité de termes, l'assertion du théorème subsiste, si un des noyaux itérés $k_m(\tau, x)$ est fini; dans ce cas, cependant, tous les noyaux itérés à partir d'un d'entre eux répondent à la condition (D).

Posons

$$k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}} + R(\tau, x). \tag{28}$$

Le noyau $R(\tau, x)$ répond à la condition (C). En effet, on a

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega) R(\tau, x)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x)\, d\omega - \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(\omega)\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}}\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}} \cdot \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\varphi_k(x)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\tau)\varphi_k(\omega)}{\lambda_k^{l}} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\, k_l(\omega, y)\, d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\omega)}{\lambda_k^{l}} \cdot \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\varphi_k(y)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\, k_l(\omega, y)\, d\tau - \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(\tau)\varphi_k(\omega)\varphi_k(y)}{\lambda_k^{l}}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\, R(\omega, y)\, d\tau.$$

Comme on a

$$\int\limits_{(D_x)} k_l(\tau, x)\, \varphi_k(\omega)\, d\tau = \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}$$

$$\int\limits_{(D_x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\, \varphi_k(\omega)\, d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \int\limits_{(D_x)} \varphi_k(x)\, \varphi_k(\omega)\, d\omega = \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l},$$

on trouve

$$\int\limits_{(D_x)} R(\tau, x)\, \varphi_k(\omega)\, d\omega = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Il suit de là que

$$(29) \quad k_{2l}(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k_l(\tau, z)\, k_l(\xi, x)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(z)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \right) k_l(\xi, x)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(D_z)} R(\tau, z) \left(R(\xi, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^l} \right) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \int\limits_{(D_z)} k_l(\xi, x)\, \varphi_k(z)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(D_z)} R(\tau, z)\, R(\xi, x)\, d\xi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k^l} \int\limits_{(D_z)} R(\tau, z)\, \varphi_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{2l}} + R_2(\tau, x),$$

où

$$R_2(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} R(\tau, z)\, R(\xi, x)\, d\xi;$$

$R_2(\tau, x)$ est le noyau itéré pour le noyau $R(\tau, x)$.

Comme on a

$$|\lambda_k|^{2l} > |\lambda_k|^l\, |\lambda_1|^l,$$

la série dans (29) répond aux mêmes conditions que la série (25).

On conclut de là en répétant les raisonnements, qu'on a

$$(29') \qquad k_{sl}(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{sl}} + R_s(\tau, x)$$

$R_s(\tau, x)$ étant le noyau itéré pour $R(\tau, x)$.

Si le noyau $k_m(\tau, x)$ répond à la condition (D), le noyau $k_{lm}(\tau, x)$ répond strictement a cette condition.

Si le noyau $k_{lm}(\tau, x)$ répond à la condition (D), la série

(30) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)}{\lambda_k^{8ml}}$$

est, suivant le § 5, uniformément convergente comme fonction de (x) et (y). Il suit de là que $L(x, y)$ étant sa somme, $L(x, y)$ est continue et on a

(31) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{8ml}} = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau)\, L(x, y)\, d\tau.$$

La fonction (31) étant finie, on en conclut, que le noyau

$$R_{8ml}(\tau, x) = k_{8ml}(\tau, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{8ml}}$$

est également fini.

Ayant ainsi démontré qu'un des noyaux itéres pour $R(\tau, x)$ est fini, nous pouvons affirmer suivant le théorème du § 13 (3) que l'équation

(32) $$\varphi(x) = c \int_{(D_y)} R(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau =$$

$$= c \int_{(D_y)} k_l(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau - c \int_{(D_y)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}}\, \varphi(y)\, d\tau,$$

si $R(\tau, x)$ n'est pas égale identiquement à zéro, a une solution $\varphi(x)$ pour un choix convenable du nombre c, où $\varphi(x)$ est différente de zéro.

Or, on s'assure aisément, que la fonction $\varphi(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales $\varphi_s(x)$. En effet

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi(x)\, \varphi_s(x)\, d\omega = c \int_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi_s(x) \left(\int_{(D_y)} k_l(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau \right) d\omega -$$

$$- c \int_{(D_x)} u(\omega)\, \varphi_s(x) \left(\int_{(D_y)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}}\, \varphi(y)\, d\tau \right) d\omega = 0$$

car

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_s(x)\left(\int_{(D_y)} k_l(\tau,x)\varphi(y)\,d\tau\right)d\omega =$$

$$=\int_{(D_y)}\varphi(y)\left(\int_{(D_x)} u(\omega)k_l(\tau,x)\varphi_s(x)\,d\omega\right)d\tau = \frac{1}{\lambda_s^l}\int_{(D_y)}\varphi(y)\varphi_s(\tau)\,d\tau$$

et

$$\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_s(x)\left(\int_{(D_y)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\cdot\varphi(y)\,d\tau\right)d\omega =$$

$$=\int_{(D_y)}\varphi(y)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\int_{(D_x)} u(\omega)\varphi_k(x)\varphi_s(x)\,d\omega\right)d\tau = \int_{(D_y)}\frac{\varphi(y)\varphi_s(\tau)}{\lambda_s^l}\,d\tau.$$

Il suit de là, comme

$$\int_{(D_y)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\varphi(y)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k^l}\int_{(D_y)}\varphi_k(\tau)\varphi(y)\,d\tau = 0,$$

que l'équation (32) a la forme

$$\varphi(x) = c\int_{(D_y)} k_l(\tau,x)\varphi(y)\,d\tau$$

et que, par conséquent, c est un nombre caractéristique du noyau $k_l(\tau, x)$ et $\varphi(x)$ une fonction fondamentale qui lui correspond; mais cette conclusion est en contradiction avec le fait établi, que $\varphi(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales $\varphi_k(x)$.

Il suit de là que $R(\tau, x)$ est égale à zéro, ce qu'il fallait démontrer. Ayant démontré la première des égalités (27), on obtient sans peine

$$k_{l+1}(\tau,x) = \int_{(D_z)} k(\tau,x)\,k_l(\xi,x)\,d\xi =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k^l}\int_{(D_z)} k(\tau,z)\varphi_k(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l+1}}.$$

Si la série (25) contient un nombre limité de termes, on s'assure directement que $R_{ml}(\tau, x)$ est fini.

7. *Remarque.* La supposition du théorème qui concerne le noyau itéré

$$k_m(\tau, x),$$

était nécessaire seulement pour établir que la série (30) est uniformément convergente comme fonction de (x) et de (y), ce qui a permis de démontrer, que le noyau itéré $R_s(\tau, x)$ est fini.

1) On s'assure aisément que, si la somme d'une des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^t}, \quad t \geq l \tag{25'}$$

est une fonction finie, un des noyaux itérés $R_s(\tau, x)$ est fini et l'assertion du théorème subsiste sous la seule condition qu'un des noyaux itérés $k_m\ (\tau, x)$ reste fini. En effet, la série (25') étant uniformément convergente comme fonction de (τ) sa somme $H(\tau, x)$ est pour chaque (x) une fonction additive et à variation bornée, ce qui est démontré dans le § 5 (2).

Si on suppose, que la fonction $H(\tau, x)$ répond aux conditions du § 15 (2), les fonctions $V_1(\tau)$, $V_2^{(\delta)}(\tau)$ étant remplacées par les fonctions $\overline{V_1}(\tau)$ et $\overline{V_2^{(\delta)}}(\tau)$ et l'ensemble (E) par l'ensemble $(\overline{E})$, la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{t+1}}$$

qui est égale à la fonction

$$\int_{(D_z)} k(\xi, x)\, H(\tau, z)\, d\xi,$$

répond aux conditions du § 14 (2). On a, en effet,

$$\left|\int_{(D_z)} k(\xi, x)\, H(\tau, z)\, d\xi\right| < \overline{V_1}(\tau)\, V_1(D_z)\, D_z$$

et, (δ) étant le domaine contenant l'ensemble (E),

$$\left|\int_{(D_z)} (k(\xi, x') - k(\xi, x''))\, H(\tau, z)\, d\xi\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\int_{(D_z-\delta)} (k(\xi, x') - k(\xi, x''))\, H(\tau, z)\, d\xi\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{(\delta)} (k(\xi, x') - k(\xi, x''))\, H(\tau, z)\, d\xi\right| <$$

$$< \varepsilon\, V_2^{(\delta)}(D_z - \delta)(D_z - \delta)\, \overline{V}_1(\tau) + 2V_1(\delta)\delta \,.\, \overline{V}_1(\tau) < \varepsilon B\, \overline{V}_1(\tau).$$

Il suit de là, que

$$R_{tm}(\tau, x) = k_{tm}(\tau, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{tm}}$$

est fini, ce qui permet d'achever la démonstration du théorème.

2) Pour le noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{(x+y)\lg^2(x+y)}$$

dans lequel (τ) est l'intervalle (α, β), où

$$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{1}{4},$$

qui répond aux conditions du § 15 (2) et à condition (C) avec $u(\omega) = 1$, aucun des noyaux itérés ne répond à la condition (D).

3) En changeant l'énoncé, on pourrait donner au théoréme la forme suivante: si la série (25) est uniformément convergente comme fonction de (x) (le domaine (τ) étant donné) et comme fonction de (τ) (le point (x) étant donné), si un des noyaux itérés $k_m(\tau, x)$ est fini et si pour un certain t on a

$$\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k^t}\right| < C, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

l'égalité (27) subsiste.

En effet, sous ces conditions on peut démontrer qu'un des noyaux itéré répond à la condition (D).

Si $k_m(\tau, x)$ est fini, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}}$$

est convergente. Il suit de là que

$$\left|\sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^{2t+2m}}\right|^2 < \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^{2t}} \cdot \frac{1}{\lambda_k^{2m}}$$

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^{2t}} \cdot \frac{1}{\lambda_k^{2m}} < C^2 \left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{1}{\lambda_k^{2m}}\right)^2 < C^2 \varepsilon^2, \text{ si } n \geqq N,$$

et que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^{2t+2m}}$$

est uniformément convergente comme fonction de (x) et (y).

Comme le noyau $k_{2t+2m}(\tau, x)$ est fini suivant la remarque au commencement du § 6, il suit de là que

$$R_{2t+2m}(\tau, x) = k_{2t+2m}(\tau, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{2t+2m}} =$$

$$= k_{2t+2m}(\tau, x) - \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\, L_{2t+2m}(x, y)\, d\tau$$

et que $R_{2t+2m}(\tau, \chi)$ est fini, ce qui permet d'achever la démonstration et donne en dernier lieu que $k_{2t+2m}(\tau, x)$ répond strictement à la condition (D).

8. Si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), on a pour $l \geqq 2$

(33) $$k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{l}},$$

car pour $l = 2$ il est démontré dans le § 4, que la série répond aux conditions du théorème et dans le § 5 nous avons démontré, que les séries (33) sont uniformément convergentes comme fonctions de (x) et de (τ) pour $l \geqq 3$.

En reprenant les formules du § 5 nous avons que

$$k_l(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\, L_l(x, y)\, d\tau,$$

$L_l(x, y)$ étant la somme de la série

(34) $$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}.$$

On obtient ainsi

$$L_2(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}.$$

9. Si l'on a

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L(x, y)\, d\tau$$

la fonction $L(x, y)$ étant continue comme fonction de (x) et de (y), on trouve

$$k_2(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k(\tau, z)\, k(\xi, x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) \Big(\int\limits_{(D_z)} L(y, z)\, \frac{1}{\xi} \int\limits_{(\xi)} u(\xi)\, L(z, x)\, d\xi \Big)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) \Big(\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, L(y, z)\, L(z, x)\, d\xi \Big)\, d\tau.$$

Il suit de là que

$$L_2(x, y) = \lim \frac{k_2(\tau, x)}{u(\tau)}_{\tau \to 0} = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, L(y, z)\, L(z, x)\, d\xi.$$

La fonction $L_2(x, y)$ étant dans ce cas continue comme fonction de (x) et de (y), la fonction $L_2(x, x)$ est également continue. Il suit de là d'après le théorème connu de Dini, que la série

(16) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}$$

est uniformément convergente, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} < \varepsilon, \text{ si } n \geq N,$$

N étant un nombre indépendant de (x). L'inégalité (19) donne alors que la série (34) est uniformément convergente même pour $l=2$, ayant pour somme $L_2(x, y)$ et què $k_2(\tau, x)$ lui-même est donné par une série uniformément convergente comme fonction de (x) et de (τ).

10. Supposons que le noyau $k(\tau, x)$ répond aux conditions (A) et (C) et qu'un des ses noyaux itérés est fini.

Supposons encore que, $k_2(\tau, x)$ étant le premier noyau itéré, subsiste l'iné

$$(35)\qquad \left|\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega\right)_{\tau=\omega} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2}\right| < A(\omega), \text{ si } n \geqq N$$

$A(\omega)$ étant une expression, dépendant des valeurs de (ω), et N un nombre indépendant de (ω).

Posons

$$k(\tau, x) = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} + R_n(\tau, x).$$

On trouve

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, R_n(\tau, x)\, d\omega$$

et

$$\left(\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, R_n(\tau, x)\, d\omega\right)^2 < \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, d\omega \cdot \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, R_n^2(\tau, x)\, d\omega <$$

$$< u(\omega)\,\omega \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, R^2{}_n(\tau, x)\, d\omega.$$

Or on a

$$(36)\qquad \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, R_n^2(\tau, x)\, d\omega = \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\left[k(\tau, x) - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right]^2 d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, k^2(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2}.$$

En appliquant la formule (5)

$$(5)\qquad \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, k(\omega, z)\, d\xi,$$

nous avons

$$\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega\right)_{\omega=\tau} = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k^2(\tau, z)\, d\xi.$$

Il suit de là suivant (35) que

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\, R_n^2(\tau, x)\, d\omega = \tag{37}$$

$$= \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega\right)_{\omega=\tau} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} < A(\tau), \text{ si } n \geqq N.$$

Donc

$$\left|\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, R_n(\tau, \omega)\, d\omega\right| < \sqrt{B}\sqrt{A(\tau)}, \quad n \geqq N,$$

B étant la variation totale de $u(\omega)$ dans (D_x). On en conclut que

$$\left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < \frac{\sqrt{B}\sqrt{A(\tau)}}{\omega}, \text{ si } n \geqq N. \tag{38}$$

La dernière inégalité à cause de la condition (C) peut être remplacée par

$$\left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < \frac{\sqrt{B}\sqrt{A(\omega)}}{\tau}, \text{ si } n \geqq N. \tag{38}$$

Soit

$$F(\tau) = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, f(z)\, d\xi \tag{39}$$

la fonction $f(z)$ étant continue. Comme on a

$$\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, f(z)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)} \left(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi)\, k(\tau, z)\, d\xi\right) f(z)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} \left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, k(\xi, y)\, d\tau\right) f(z)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau) \left(\int\limits_{(D_z)} k(\xi, y)\, f(z)\, d\xi\right) d\tau,$$

la fonction $F(\tau)$ est la moyenne de la fonction

$$\int_{(D_z)} k(\xi, y) f(z)\, d\xi.$$

On trouve

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} \int_{(D_z)} u(\xi)\varphi_k(z) f(z)\, d\xi + \int_{(D_z)} u(\xi) R_n(\tau, z) f(z)\, d\xi$$

où, suivant (37),

$$\left|\int_{(D_z)} u(\xi) R_n(\tau, z) f(z)\, d\xi\right|^2 < \int_{(D_z)} u(\xi) f^2(z)\, d\xi \cdot \int_{(D_z)} u(\xi) R_n^2(\tau, z)\, d\xi <$$

$$< \int_{(D_z)} u(\xi) f^2(z)\, d\xi \cdot A(\tau), \quad n \geqq N.$$

Remarquons qu'on a

$$c_k = \int_{(D_y)} F(\tau)\varphi_k(y)\, d\tau = \int_{(D_y)} \varphi_k(y) \left(\int_{(D_z)} u(\xi) k(\tau, z) f(z)\, d\xi \right) d\tau =$$

$$= \int_{(D_z)} u(\xi) f(z) \left(\int_{(D_y)} k(\tau, z)\varphi_k(y)\, d\tau \right) d\xi = \frac{1}{\lambda_k} \int_{(D_z)} u(\xi) f(z)\varphi_k(z)\, d\xi.$$

On obtient donc finalement

$$(40) \qquad \left| F(\tau) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(\tau) \right| < \sqrt{\int_{(D_z)} u(\xi) f^2(z)\, d\xi}\, \sqrt{A(\tau)}, \text{ si } n \geqq N.$$

Si l'on choisi pour $f(z)$ le noyau $k(\omega, z)$, on trouve, en utilisant de nouveau la formule (5), que

$$(38') \qquad \left| \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) k_2(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2} \right| <$$

$$< \sqrt{\int_{(D_z)} u(\xi) k^2(\omega, z)\, d\xi}\, \sqrt{A(\tau)}, \quad n \geqq N.$$

Remarque. Si le noyau $k(\tau, x)$ est fini et si l'on a

$$|k(\tau, x)| < V_1(\tau)$$

on peut remplacer, en désignant par C^2 la borne totale de $u(\omega)$, la dernière inégalité par

$$\left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\right| < C V_1(\omega) \sqrt{A(\tau)}, \quad n \geq N.$$

Comme l'inégalité (35) prend dans ce cas la forme

$$\left|\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_2(\tau, x)\, d\omega\right)_{\tau=\omega} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2}\right| < C V_1(\omega) \sqrt{A(\omega)}, \quad n \geq N$$

on voit qu'on peut à la place de $A(\omega)$ mettre chacune des fonctions

$$A_1(\omega),\ A_2(\omega),\ \ldots,\ A_n(\omega)$$

où

$$A_n(\omega) = C V_1(\omega) \sqrt{A_{n-1}(\omega)}.$$

Comme on a

$$A_n(\omega) = \left(C V_1(\omega)\right)^{2 - \frac{1}{2^n}} A(\omega)^{\frac{1}{2^n}}$$

et comme la limite de

$$A(\omega)^{\frac{1}{2^n}}$$

est égale à l'unité, si $A(\omega)$ est différente de zéro, on en conclut qu'on peut remplacer $A(\omega)$ par $C^2 V_1^2(\omega)$.

11. Supposons maintenant que le noyau itéré $k_l(\tau, x)$ répond à la condition (D). Il suit des conditions du § 6 qu'on a dans ce cas

$$k_{8l}(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{8l}} = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L_{8l}(x, y)\, d\tau$$

$$L_{8l}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\lambda_k^{8l}},$$

toutes les séries étant uniformément convergentes comme fonctions de leurs deux arguments.

On voit facilement que tous les noyaux

$$k_m(\tau, x), \quad m > 3l$$

ont la même forme. On a, en effet

$$k_{3l+1}(\tau, x) = \int\limits_{(D_z)} k_{3l}(\tau, z)\, k(\xi, x)\, d\xi = \int\limits_{(D_z)} \Big(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L_{3l}(z, y)\, d\tau\Big)\, k(\xi, x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\Big(\int\limits_{(D_z)} L_{3l}(z, y)\, k(\xi, x)\, d\xi\Big)\, d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L_{3l+1}(x, y)\, d\tau$$

où

$$L_{3l+1}(x, y) = \int\limits_{(D_z)} L_{3l}(z, y)\, k(\xi, x)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k^{3l}} \int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)\, \varphi_k(z)\, d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y)\,\varphi_k(x)}{\lambda_k^{3l+1}}$$

et ainsi de suite.

Posons

$$m = 2^s \geqq 3l.$$

Nous avons

$$k_m(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{m}} = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L_m(x, y)\, d\tau.$$

Comme

$$\Big| L_m(x, y) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)}{\lambda_k^{m}} \Big| < \varepsilon, \text{ si } n \geqq N$$

N étant indépendant de (x) et de (y), nous avons

$$\Big| \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, L_m(x, y)\, d\tau - \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{m}} \Big| < \varepsilon u(\tau), \text{ si } n \geqq N$$

et

$$\Big| \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_m(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{m}} \Big| < \varepsilon u(\tau)\, u(\omega), \text{ si } n \geqq N$$

d'où il suit que

$$\left|\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_m(\tau, x)\right)_{\omega=\tau} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^m}\right| < \varepsilon u^2(\tau), \text{ si } n \geqq N.$$

En appliquant la formule (38) nous obtenons pas à pas

$$(41)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_{\frac{m}{2}}(\tau, x)\,d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{\frac{m}{2}}}\right| < \dfrac{\sqrt{B}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,u(\tau)}{\omega} \\ \left|\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_{\frac{m}{2^2}}(\tau, x)\,d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^{\frac{m}{2^2}}}\right| < \dfrac{B^{\frac{5}{4}}\,\varepsilon^{\frac{1}{2^2}}}{\omega\tau} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_2(\tau, x)\,d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\right| < \dfrac{B^{\frac{2^{s-1}+1}{2^{s-1}}}\,\varepsilon^{\frac{1}{2^{s-1}}}}{\omega\tau} \\ \left|\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k(\tau, x)\,d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < \dfrac{B^{\frac{2^s+1}{2^s}}\,\varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\omega\tau}. \end{cases}$$

Comme pour chaque $k_l(\tau, x)$ on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_l(\tau, x)\,d\omega = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\,k(\tau, z)\,k_{l-1}(\omega, z)\,d\xi,$$

on trouve en appliquant la formule (40):

$$(42)\quad \left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k_l(\tau, x)\,d\omega - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\right| < \sqrt{\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\,k_{l-1}^2(\omega, z)\,d\xi}\cdot\frac{B^{\frac{2^{s-1}+1}{2^s}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\tau},$$

car dans le cas considéré

$$c_k = \int\limits_{(D_y)} \left(\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_l(\tau, x)\, d\omega \right) \varphi_k(y)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) k_l(\omega, y)\, d\tau \right) \varphi_k(y)\, d\tau = \int\limits_{(D_y)} u(\tau) k_l(\omega, y)\, \varphi_k(y)\, d\tau = \frac{\varphi_k(\omega)}{\lambda_k^l}.$$

On voit ainsi que si un des noyaux itérés répond à la condition (D), on a pour tous les noyaux

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_l(\tau, x)\, d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}, \qquad l = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

L'inégalité (40) donne dans ce cas: si

$$F(\tau) = \int\limits_{(D_z)} u(\xi) k(\tau, z) f(z)\, d\xi,$$

on a

$$\left| F(\tau) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(\tau) \right| < \sqrt{\int\limits_{(D_z)} u(\xi) f^2(z)\, d\xi}\; \frac{B^{\frac{2^s - 1 + 1}{2^s}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\tau}, \qquad n \geqq N.$$

On a donc

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi(\tau), \qquad c_k = \int\limits_{(D_y)} F(\tau) \varphi_k(y)\, d\tau. \tag{44}$$

12. Supposons maintenant que $k(\tau, x)$ est fini. Il était démontré dans le § 5 que les séries (43) pour $l \geqq 3$ sont uniformément convergentes comme fonctions de (ω) et de (τ), si le noyau $k(\tau, x)$ est fini. Comme on a

$$|k_l(\tau, x)| < C_l\, V_1(\tau)$$

l'inégalité (42) prend la forme

$$\left| \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) k_l(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \right| < A_l\, \frac{V_1(\omega)\, \varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\tau}, \tag{42'}$$

A_l étant un nombre détérminé, d'où suit que dans le cas considéré la série (43) pour $l=2$ est uniformément convergente comme fonction de (ω), (le domaine (τ) étant donné) et comme fonction de (τ) (le domaine (ω) étant donné).

Si le noyau $k(\tau, x)$ est fini, la série (44) est absolument et uniformément convergente, car on a

$$c_k = \int\limits_{(D_y)} F(\tau)\varphi_k(y)\,d\tau = \int\limits_{(D_y)} \varphi_k(y)\Big(\int\limits_{(D_z)} u(\xi)k(\tau,z)f(z)\,d\xi\Big)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} u(\xi)f(z)\Big(\int\limits_{(D_y)} k(\tau,z)\varphi_k(y)\,d\tau\Big)\,d\xi = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{(D_z)} u(\xi)f(z)\varphi_k(z)\,d\xi = \frac{h_k}{\lambda_k},$$

h_k étant le coefficient de Fourier dans le développement de la fonction $f(x)$.

On a donc

$$\Big(\sum_{k=n}^{k=m}|c_k|\,\varphi_k(\tau)\Big)^2 = \Big(\sum_{k=n}^{k=m}|h_k|\frac{|\varphi_k(\tau)|}{|\lambda_k|}\Big)^2 < \sum_{k=n}^{k=m}h_k^2\sum_{=n}^{k=m}\frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} <$$

$$< \varepsilon\int\limits_{(D_x)} u(\omega)k^2(\tau,x)\,d\omega, \text{ si } n \geqq N,$$

N étant un nombre indépendant de (τ), d'où il suit que

$$\sum_{k=n}^{k=m}|c_k|\,|\varphi_k(\tau)| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{B}\,V_1(\tau), \quad \text{si } n \geqq N$$

et que

$$\Big|F(\tau) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k\varphi_k(\tau)\Big| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{B}\,V_1(\tau), \quad \text{si } n \geqq N. \tag{45}$$

Convenons de dire que la fonction $u(\omega)$ répond à la condition (B_1), si l'ensemble (E_0) des points (x), dans lesquels la valeur de $u(\omega)$ est égale à zéro, est de mesure nulle et supposons, que la fonction $u(\omega)$ vérifie la condition (B_1).

Exemple. Si (ω) est l'intervalle (α, β) où $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ et si

$$u(\omega) = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{2^{2n-1}}$$

où s_n est le nombre des fractions de la forme $\frac{2k+1}{2^n}$, vérifiant l'inégalité

$$\alpha < \frac{2k+1}{2^n} \leqq \beta,$$

la fonction moyenne $u(\omega)$ répond à la condition (B), mais non à la condition (B_1).

Rappelons, que la fonction $V_1(\omega)$ a presque partout une valeur.

Soit (x) un point, dans lequel $u(\omega)$ est différente de zéro et la fonction $V_1(\omega)$ a une valeur.

En désignant par (ω) un domaine contenant le point (x), divisons les inégalités (42') et (45) par $u(\omega)$, ayant remplacé dans la dernière (τ) par (ω):

$$\left|\frac{1}{\omega\, u(\omega)} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)}{u(\omega)} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\right| < A_l \frac{V_1(\omega)}{u(\omega)} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\tau},$$

$$\left|\frac{F(\omega)}{u(\omega)} - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \frac{\varphi_k(\omega)}{u(\omega)}\right| < \sqrt{\varepsilon}\, \sqrt{B}\, \frac{V_1(\omega)}{u(\omega)}$$

et faisons tendre (ω) vers zéro. Les fonctions $k_l(\tau, x)$, $\varphi_k(x)$, $F(x)$ étant continues, on a

$$\lim \frac{1}{\omega\, u(\omega)} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k_l(\tau, x)\, d\omega = \lim \frac{u(\omega)\, k_l(\tau, x')}{u(\omega)} = \lim k_l(\tau, x') = k_l(\tau, x)$$

$$\lim \frac{F(\omega)}{u(\omega)} = \lim \frac{1}{\omega\, u(\omega)} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, F(x)\, d\omega = F(x), \quad \lim \frac{\varphi_k(\omega)}{u(\omega)} = \varphi_k(x);$$

nous obtenons pour le point (x) si $n \geqq N_\tau$,

$$\left|k_l(\tau, x) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}\right| < C(x) \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2^s}}}{\tau},$$

$$\left|F(x) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k\, \varphi_k(x)\right| < C(x)\sqrt{\varepsilon},$$

$C(x)$ étant dépendant de (x), d'où suit que les égalités

$$k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \tag{43'}$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{44}$$

subsistent presque partout, si la fonction $u(\omega)$ répond à la condition (B_1).

13. Nous avons démontré dans le § 8 que, si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), les séries

$$k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l} \tag{33}$$

sont uniformément convergentes comme fonctions de (x) et de (τ) pour $l \geqq 3$; pour $l = 2$ la série (33) est uniformément convergente comme fonction de (x) (le domaine (τ) étant donné) et comme fonction de (τ) (le point (x) étant donné).

On a, de plus, suivant le § 8

$$k_l(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) L_l(x, y)\, d\tau$$

où

$$L_l(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}, \tag{34}$$

la série étant uniformément convergente comme fonction de (x) et de (y) pour $l \geqq 3$ et, pour $l = 2$, uniformément convergente comme fonction de (x) (le point (y) étant donné) et comme fonction de (y) (le point (x) étant donné).

En substituant dans ce cas $u(\tau)$ à la place de $V_1(\tau)$ dans (45), on trouve

$$\left| F(\tau) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(\tau) \right| < \sqrt{\varepsilon}\, \sqrt{B}\, u(\tau), \quad \text{si } n \geqq N.$$

Or on a

$$\text{si } (\tau) \to 0: \quad \lim \frac{F(\tau)}{u(\tau)} = F(y),$$

où, suivant le § 10,

$$F(y) = \int_{(D_z)} k(\xi, y) f(z)\, d\xi.$$

On trouve donc, en divisant la dernière inégalité par $u(\tau)$ et en faisant tendre (τ) vers zéro, que

$$(46) \qquad \left| F(y) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(y) \right| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{B}, \quad \text{si } n \geqq N.$$

On en conclut que la fonction $F(y)$ est donnée par la série

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(y),$$

qui est absolument et uniformément convergente.

14. Si l'on a de plus

$$(47) \qquad k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) L(x, y)\, d\tau,$$

la fonction $L(x, y)$ étant continue, l'égalité (33) subsiste même pour $l = 1$.

Les séries (33) et (34) étant pour $l = 2$ uniformément convergentes comme fonctions de leurs deux arguments, on a l'inégalité

$$\left| L_2(x, y) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2} \right| < \varepsilon, \quad n \geqq N$$

qui conduit à l'inégalité

$$\left| \left(\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) k_2(\tau, x)\, d\omega \right)_{\tau=\omega} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\omega)}{\lambda_k^2} \right| < \varepsilon u^2(\omega), \quad n \geqq N$$

ce qui montre, qu'on a dans ce cas

$$A(\omega) = \varepsilon u^2(\omega)$$

et l'inégalité (38') se transforme en

$$\left|\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,k(\tau,x)\,d\omega - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(\omega)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < \frac{\sqrt{B}\sqrt{\varepsilon}\,u(\omega)}{\tau}, \quad n \geqq N,$$

d'où il suit, par le procédé du passage à la limite, l'inégalité

$$\left|k(\tau,x) - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\right| < \frac{\sqrt{B}\sqrt{\varepsilon}}{\tau}, \quad n \geqq N.$$

Nous avons dans notre cas

$$(48) \qquad F(y) = \int\limits_{(D_z)}\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} u(\xi)\,L(y,z)\,d\xi\right) f(z)\,d\xi = \int\limits_{(D_z)} u(\xi)\,L(y,z)\,f(z)\,d\xi.$$

La fonction de la forme (48) est donc développable pour chaque fonction $f(z)$ dans la série (46), qui est absolument et uniformément convergente.

En posant

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi}\int\limits_{(D_z)} u(\xi)\,f(z)\,d\xi,$$

nous obtenons

$$F(\tau) = \int\limits_{(D_z)} k(\tau,z)\,f(\xi)\,d\xi,$$

d'où suit

$$(44') \qquad \int\limits_{(D_z)} k(\tau,z)\,f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varphi_k(\tau), \quad c_k = \int\limits_{(D_y)} F(\tau)\,\varphi_k(y)\,d\tau.$$

La dernière formule peut être généralisée dans le cas que nous considérons. Comme la série

$$k(\tau,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}$$

est uniformément convergente comme fonction de (x), le domaine (τ) étant donné, on a pour chaque fonction moyenne additive et à variation bornée $v(\omega)$ que

$$w(\tau)=\int_{(D_x)} k(\tau,x)\,v(\omega)\,d\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}\int_{(D_x)}\varphi_k(x)\,v(\omega)\,d\omega=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\,\varphi_k(\tau)$$

où

$$g_k=\frac{1}{\lambda_k}\int_{(D_x)} v(\omega)\,\varphi_k(x)\,d\omega=\int_{(D_y)} w(\tau)\,\varphi_k(y)\,d\tau,$$

la convergence uniforme de la série n'étant pas démontrée.

Comme la série

$$k_2(\tau,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}$$

est uniformément convergente comme fonction de (x) et de (τ), pour chaque fonction additive et à variation bornée $v(\omega)$ on a

$$(49)\qquad w(\tau)=\int_{(D_x)} k_2(\tau,x)\,v(\omega)\,d\omega=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\int_{(D_x)}\varphi_k(x)\,v(\omega)\,d\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\tau)\int_{(D_y)} w(\tau)\,\varphi_k(y)\,d\tau,$$

la série étant uniformément convergente.

Si on sait seulement que $k(\tau,x)$ répond à la condition (D), l'égalité (49) subsiste, mais on ne peut pas affirmer que la série soit uniformément convergente.

On peut de même donner à la série (46) la forme

$$(46')\qquad F(y)=\int_{(D_z)} L(z,y)\,f(\xi)\,d\xi=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varphi_k(y),\quad c_k=\int_{(D_x)} F(y)\,\varphi_k(\tau)\,d\tau.$$

Mais l'égalité plus générale, contenant la fonction $v(\xi)$ à variation bornée

$$F(y)=\int\limits_{(D_z)} L(z, y)\, v(\xi)\, d\xi=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(y), \quad c_k=\int\limits_{(D_x)} F(y)\, \varphi_k(\tau)\, d\tau$$

peut être écrite seulement quand on sait que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\lambda_k}$$

est uniformément convergente comme fonction de (x), le point (y) étant donné.

Si l'on a affaire à une équation intégrale

$$\varphi(x)=\lambda \int\limits_{(D_y)} L(y, x)\, \varphi(y)\, d\tau+f(x),$$

où $L'(y, x)$ est une fonction symétrique et continue, on peut lui donner la forme

$$\varphi(x)=\lambda \int\limits_{(D_y)}\left(\frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y, x)\, d\tau\right) \varphi(y)\, d\tau+f(x).$$

L'application des formules établies montre, qu'on a toujours

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y, x)\, d\tau=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(\tau)}{\lambda_k}, \quad \varphi_k(\tau)=\frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} \varphi_k(y)\, d\tau,$$

$\varphi_k(x)$ étant les fonctions fondamentales de l'équation et la série étant uniformément convergente comme fonction de (x), (τ) étant donnée; quelque soit la fonction moyenne $v(\omega)$ additive et à variation bornée, la valeur moyenne de

$$F(x)=\int\limits_{(D_y)} L(y, x)\, v(\tau)\, d\tau$$

est développable dans une série suivant les valeurs moyennes des fonctions fondamentales

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} F(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\omega), \quad c_k = \int\limits_{(D_x)} F(x)\,\varphi_k(x)\,d\omega;$$

seulement la convergence uniforme de la série n'est pas établie.

15. Nous disons que la suite

$$(8) \qquad \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

des fonctions fondamentales est fermée dans le corps des fonctions continues, si, ayant posé

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(x), \quad c_k = \int\limits_{(D_x)} u(\omega) f(x)\,\varphi_k(x)\,d\omega,$$

on a pour chaque fonction continue $f(x)$ l'égalité

$$\lim \int\limits_{(D_y)} u(\tau)\,R_n^2(y)\,d\tau = 0,$$

ou

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega) f^2(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Si la suite (8) est fermée, on a pour chaque fonction continue $f(x)$ le développement

$$(50) \qquad \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\omega).$$

En effet

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,f(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(\omega) + \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} u(\omega)\,R_n(x)\,d\omega$$

et on a

$$\left|\int\limits_{(\omega)} u(\omega) R_n(x)\, d\omega\right|^2 < \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, d\omega \int\limits_{(\omega)} u(\omega) R_n^2(x)\, d\omega <$$

$$< u(\omega)\, \omega \int\limits_{(D_x)} u(\omega) R_n^2(x)\, d\omega.$$

Il suit de là que le terme complémentaire de la série (50) tend vers zéro. Si la ferméture de la suite (8) est démontrée et si la suite (8) corespon d au noyau de la forme

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) L(x, y)\, d\tau,$$

la fonction symétrique $L(x, y)$ étant fini ou non, mais telle que l'intégrale

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega) L^2(x, y)\, d\omega$$

a un sens, chaque fonction de la forme

$$f(x) = \int\limits_{(D_y)} u(\tau) L(x, y) h(y)\, d\tau = \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) h(y)\, d\tau,$$

où $h(x)$ est une fonction continue, est développable dans une série suivant les fonctions (8). En effet, si l'on pose

$$(51) \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{k=n} h_k \varphi_k(x) + R_n(x), \quad h_n = \int\limits_{(D_x)} u(\omega) h(x) \varphi_n(x)\, d\omega,$$

on trouve

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \varphi_k(x) + \int\limits_{(D_y)} u(\tau) L(x, y) R_n(y)\, d\tau$$

où

$$c_k = \int\limits_{(D_x)} u(\omega) f(x) \varphi_k(x)\, d\omega = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{(D_x)} u(\omega) h(x) \varphi_k(x)\, d\omega = \frac{h_k}{\lambda}$$

et on s'assure que

$$\left(\int_{(D_y)} u(\tau)\, L(x,y)\, R_n(y)\, d\tau\right)^2 <$$

$$< \int_{(D_y)} u(\tau)\, L^2(x,y)\, d\tau \,.\int_{(D_y)} u(\tau)\, R_n^2(y)\, d\tau < A^2 \varepsilon^2, \quad n \geq N,$$

A étant un nombre détérminé.

La série

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(x)$$

converge absolument et uniformément, si le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), car on a:

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} |c_k|\,|\varphi_k(x)|\right)^2 = \left(\sum_{k=n}^{m} |h_k| \frac{|\varphi_k(x)|}{|\lambda_k|}\right)^2 < \sum_{k=n}^{m} h_k^2 \,.\sum_{k=n}^{m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}\,.$$

16. En supposant, que le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D), reprenons l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau + f(x). \tag{52}$$

Comme, d'après les considérations du § 13, la fonction

$$\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau$$

peut être développée dans une série uniformément convergente suivant les fonctions fondamentales, on trouve, en répétant textuellement les raisonnements ordinaires qu'on a

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda c_k}{\lambda_k - \lambda}\, \varphi_k(x), \quad c_k = \int_{(D_x)} u(\omega) f(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega. \tag{53}$$

En passant maintenant à l'équation associée

$$(52') \qquad v(\tau) = \lambda \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x) v(\omega) d\omega + F(\tau),$$

où $F(\tau)$ est une fonction moyenne à variation bornée, on trouve que

$$(54) \qquad v(\tau) = F(\tau) + \lambda \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x) F(\omega) d\omega + \lambda^2 \int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) v(\omega) d\omega =$$

$$= F_1(\tau) + \lambda^2 \int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) v(\omega) d\omega.$$

La série qui donne le développement de

$$\int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) v(\omega) d\omega$$

suivant les valeurs moyennes des fonctions fondamentales étant uniformément convergente, on peut appliquer à l'équation (54) tous ce qu'on dit à propos de l'équation (52). Si l'on pose

$$\int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) v(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(\tau)$$

$$\int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) F_1(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varphi_k(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k}{\lambda_k^2} \varphi_k(\tau)$$

où

$$h_k = \int\limits_{(D_y)} \left(\int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x) F_1(\omega) d\omega \right) \varphi_k(y) d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_x)} F_1(\omega) \left(\int\limits_{(D_y)} k_2(\tau, x) \varphi_k(y) d\tau \right) d\omega = \frac{\int\limits_{(D_x)} F_1(\omega) \varphi_k(x) d\omega}{\lambda_k^2} = \frac{l_k}{\lambda_k^2},$$

on trouve que

$$g_k \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right) = \frac{l_k}{\lambda_k^2}, \qquad g_k = \frac{l_k}{\lambda_k^2 - \lambda^2}$$

et

$$v(\tau) = F_1(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k \lambda^2}{\lambda_k^2 - \lambda^2} \varphi_k(\tau).$$

Or, on a

$$l_k = \int\limits_{(D_x)} F(\omega) \varphi_k(x) d\omega + \lambda \int\limits_{(D_x)} \varphi_k(x) \Big(\int\limits_{(D_z)} k(\omega, z) F(\xi) d\xi \Big) d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_x)} F(\omega) \varphi_k(x) d\omega + \lambda \int\limits_{(D_z)} F(\xi) \Big(\int\limits_{(D_x)} k(\omega, z) \varphi_k(x) d\omega \Big) d\xi = c_k \Big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_k} \Big),$$

où

$$c_k = \int\limits_{(D_x)} F(\omega) \varphi_k(x) d\omega.$$

Il suit de là finalement

$$v(\tau) = F(\tau) + \lambda \int\limits_{(D_x)} k(\tau, x) F(\omega) d\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \lambda}{\lambda_k - \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_k} \varphi_k(\tau).$$

Si le noyau $k(\tau, x)$ répond seulement aux conditions (A) et (C), ayant un noyau itéré $k_l(\tau, x)$ répondant à la condition (D), tous les noyaux $k_m(\tau, x)$ à partir d'une certaine valeur de m sont de la forme (47) et même tels que la fonction $L_m(x, y)$ est développable dans une série uniformément convergente de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(x)}{\lambda_k^m}.$$

Comme les solutions des équations (52) et (52') vérifient aussi les équations

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) f(y) d\tau + \lambda^2 \int\limits_{(D_y)} k_2(\tau, x) f(y) d\tau + \cdots +$$

$$+ \lambda^{m-1} \int\limits_{(D_y)} k_{m-1}(\tau, x) f(y) d\tau + \lambda^m \int\limits_{(D_y)} k_m(\tau, x) \varphi(y) d\tau$$

$$v(\tau)=F(\tau)+\lambda\int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)F(\omega)\,d\omega+\lambda^2\int\limits_{(D_x)} k_2(\tau, x)F(\omega)\,d\omega+\cdots+$$

$$+\lambda^{m-1}\int\limits_{(D_x)} k_{m-1}(\tau, x)F(\omega)\,d\omega+\lambda^m\int\limits_{(D_x)} k_m(\tau, x)v(\omega)\,d\omega$$

on s'assure aisément qu'on a

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)f(y)\,d\tau+\cdots+\lambda^{m-1}\int\limits_{(D_y)} k_{m-1}(\tau, x)f(y)\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\frac{\lambda^{m-1}}{\lambda_k^{m-1}}c_k\varphi_k(x),$$

$$v(\tau)=F(\tau)+\lambda\int\limits_{(D_x)} k(\tau, x)F(\omega)\,d\omega+\cdots+\lambda^{m-1}\int\limits_{(D_x)} k_{m-1}(\tau, x)F(\omega)\,d\omega+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\frac{\lambda^{m-1}}{\lambda_k^{m-1}}c_k\varphi_k(\tau),$$

où

$$c_k=\int\limits_{(D_x)} u(\omega)f(x)\varphi_k(x)\,d\omega=\int\limits_{(D_x)} f(x)\varphi_k(\omega)\,d\omega,\quad \text{resp. } c_k=\int\limits_{(D_x)} F(\omega)\,\varphi_k(x)\,d\omega.$$

17. Pour donner une application aux formules du § 16, nous allons démontrer les formules de Plemelj, mentionnées dans le § 14 (3). Supposons, que le noyau $k(\tau, x)$ est fini et qu'un de ces noyaux itérés répond à la condition (D).

En rappelant les formules du § 4 (3) nous avons, en introduisant le détérminant de Fredholm et ses mineurs en premier lieu que

$$D\left(\begin{matrix}x\\ \tau\end{matrix}\middle|\lambda\right)=\lambda\int\limits_{(D_z)} k(\xi, x)D\left(\begin{matrix}z\\ \tau\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\xi+k(\tau, x)D(\lambda)$$

d'où il suit

$$D\left(\begin{matrix}x\\ \tau\end{matrix}\middle|\lambda\right)=D(\lambda)\Bigg\{k(\tau, x)+\lambda k_2(\tau, x)+\cdots+\lambda^{m-1}k_{m-1}(\tau, x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\frac{\lambda^m}{\lambda_k^m}\varphi_k(\tau)\,\varphi_k(x)\Bigg\};$$

car dans le cas considéré on a

$$c_k = D(\lambda)\int_{(D_x)} k(\tau, x)\varphi_k(\omega)\,d\omega = \frac{D(\lambda)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}$$

Comme on a

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ \tau_1, \tau_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) = \lambda\int_{(D_z)} k(\xi, x_1) D\begin{pmatrix} z_1, x_2 \\ \tau_1, \tau_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) d\xi +$$

$$+ k(\tau_1, x_1) D\begin{pmatrix} x_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix}\lambda\Big) - k(\tau_2, x_1) D\begin{pmatrix} x_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}\lambda\Big),$$

on trouve en appliquant les mêmes formules

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2 \\ \tau_1, \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right) = D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right)\Big\{k(\tau_1, x_1) + \lambda k_2(\tau_1, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} k_{m-1}(\tau_1, x_1)\Big\} -$$

$$- D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right)\Big\{k(\tau_2, x_1) + \lambda k_2(\tau_2, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} k_{m-1}(\tau_2, x_1)\Big\} +$$

$$+ D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k - \lambda}\,\frac{\lambda^m}{\lambda_k^m}\varphi_k(\tau_1)\varphi_k(x_1)\Big) -$$

$$- D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k - \lambda}\,\frac{\lambda^m}{\lambda_k^m}\varphi_k(\tau_2)\varphi_k(x_1) =$$

$$= D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right) D\left(\begin{matrix} x_1 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right) - D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right) D\left(\begin{matrix} x_1 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x_1 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right), & D\left(\begin{matrix} x_1 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right) \\ D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_1 \end{matrix}\middle| \lambda\right), & D\left(\begin{matrix} x_2 \\ \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right) \end{vmatrix}.$$

L'application des mêmes formules à l'équation

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ \tau_1, \tau_2, \tau_3 \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \lambda\int_{(D_z)} k(\xi, x_1) D\left(\begin{matrix} z_1, z_2, z_3 \\ \tau_1, \tau_2, \tau_3 \end{matrix}\middle| \lambda\right) d\xi +$$

$$+ k(\tau_1, x_1) D\left(\begin{matrix} x_2, x_3 \\ \tau_2, \tau_3 \end{matrix}\middle| \lambda\right) - k(\tau_2, x_1) D\left(\begin{matrix} x_2, x_3 \\ \tau_1, \tau_3 \end{matrix}\middle| \lambda\right) - k(\tau_3, x_1) D\left(\begin{matrix} x_3, x_2 \\ \tau_1, \tau_2 \end{matrix}\middle| \lambda\right)$$

donne immédiatement

$$D\left(\begin{matrix}x_1, x_2, x_3\\ \tau_1, \tau_2, \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)=$$

$$=D\left(\begin{matrix}x_2, x_3\\ \tau_2, \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right)-D\left(\begin{matrix}x_2, x_3\\ \tau_1, \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right)-D\left(\begin{matrix}x_3, x_2\\ \tau_1, \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right)D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_1\\ \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)\\ D\left(\begin{matrix}x_2\\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_2\\ \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_2\\ \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)\\ D\left(\begin{matrix}x_3\\ \tau_1\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_3\\ \tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right), & D\left(\begin{matrix}x_3\\ \tau_3\end{matrix}\middle|\lambda\right)\end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

18. Supposons que les deux noyaux, $k(\tau, x)$ et $g(\tau, x)$, qui répondent à la condition (A), sont unis par l'égalité

$$(54)\qquad \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)k(\tau, x)\,d\omega = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)g(\omega, y)\,d\tau,$$

où $u(\omega)$ et $v(\omega)$ sont les fonctions moyennes vérifiant la condition (B).

Par exemple, si $L(x, y)$ est une fonction continue de (x) et de (y), nous sommes dans le cas considéré, si

$$(55)\qquad k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)L(x, y)\,d\tau,\quad g(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} v(\tau)L(y, x)\,d\tau.$$

En effet, dans ce cas

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)k(\tau, x)\,d\omega = \frac{1}{\omega\tau}\int_{(\omega)} v(\omega)\left(\int_{(\tau)} u(\tau)L(x, y)\,d\tau\right)d\omega$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)g(\omega, y)\,d\tau = \frac{1}{\tau\omega}\int_{(\tau)} u(\tau)\left(\int_{(\omega)} v(\omega)L(x, y)\,d\omega\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)\left(\int_{(\tau)} u(\tau)L(x, y)\,d\tau\right)d\omega.$$

J'ai envisagé les noyaux de la forme (55) dans ma communication au Congrès à Bologne.

Remarque. Si le noyau $k(\tau, x)$ répond strictement à la condition (D) par rapport à $u(\tau)$, le noyau $g(\tau, x)$ répond strictement à cette condition par rapport à $v(\tau)$. En effet, de l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, g(\omega, y)\, d\tau\right| < \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(\omega)\, |k(\tau, x)|\, d\omega <$$

$$< \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(\omega)\, Cu(\tau)\, d\omega = Cu(\tau)\, v(\omega)$$

on conclut en divisant par $u(\tau)$ et en passant vers la limite, que

$$|g(\omega, y)| < Cv(\omega).$$

Les noyaux (55) répondent aux conditions de cette remarque.

Envisageons le système des équations

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\, \psi(y)\, d\tau$$

(56) $$\psi(x) = \lambda \int\limits_{(D_y)} g(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau.$$

En éliminant $\psi(x)$ on trouve, que

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\left(\int\limits_{(D_z)} g(\xi, y)\, \varphi(z)\, d\xi\right) d\tau =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_{(D_z)} \varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) g(\xi, y)\, d\tau\right) d\xi$$

ou

(57) $$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(D_z)} \overline{k(\xi, x)}\, \varphi(z)\, d\xi,$$

ayant posé

(58) $$\overline{k(\xi, x)} = \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) g(\xi, y)\, d\tau.$$

Le noyau $\overline{k(\xi, x)}$ répond à la condition (C) par rapport à $v(\omega)$.

En effet, on a

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)\overline{k(\xi, x)}\,d\omega = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)\Big(\int_{(D_y)} k(\tau, x)g(\xi, y)\,d\tau\Big)\,d\omega =$$

$$= \int_{(D_y)} g(\xi, y)\Big(\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} v(\omega)k(\tau, x)\,d\omega\Big)\,d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} g(\xi, y)\Big(\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)g(\omega, y)\,d\tau\Big)\,d\tau = \int_{(D_y)} u(\tau)g(\omega, y)g(\xi, y)\,d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} g(\omega, y)\Big(\frac{1}{\tau}\int u(\tau)g(\xi, y)\,d\tau\Big)\,d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} g(\omega, y)\Big(\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} v(\xi)k(\tau, z)\,d\xi\Big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} v(\xi)\Big(\int_{(D_y)} g(\omega, y)\,k(\tau, z)\,d\tau\Big)\,d\xi = \frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} v(\xi)\overline{k(\omega, z)}\,d\xi.$$

On a de même

(57′) $$\psi(x) = \lambda^2 \int_{(D_z)} \underline{k(\xi, x)}\,\psi(z)\,d\xi$$

où

(58′) $$\underline{k(\xi, x)} = \int_{(D_y)} g(\tau, x)\,k(\xi, y)\,d\tau$$

et $\underline{k(\xi, x)}$ répond à la condition (C) par rapport à $u(\omega)$.

Nous supposons que le noyau $\overline{k(\tau, x)}$ répond à la condition (D) par rapport à $v(\tau)$.

Cette condition est évidemment satisfaite, si le noyau $k(\tau, x)$ répond strictement à la condition (D) par rapport à $u(\tau)$; le noyau $g(\tau, x)$ répond dans ce cas strictement à la condition (D) par rapport à $v(\tau)$ et on a

$$|\overline{k(\tau, x)}| = \Big|\int_{(D_z)} k(\xi, x)g(\tau, z)\,d\xi\Big| < Cv(\tau)\int_{(D_z)} k(\xi, x)\,d\xi.$$

L'équation (57) a sous cette supposition des solutions et les nombres caratéristiques du noyau $\overline{k(\xi, x)}$ sont réels; comme on a:

$$\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_{(D_x)} v(\omega)\,\varphi^2(x)\,d\omega = \int\limits_{(D_x)} v(\omega)\,\varphi(x)\left(\int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x) g(\xi, y)\,d\tau\right)d\xi\right)d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} g(\xi, y)\left(\int\limits_{(D_x)} v(\omega) k(\tau, x)\,\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} g(\xi, y)\left(\int\limits_{(D_x)}\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(\omega) k(\tau, x)\,d\omega\right)\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} g(\xi, y)\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\left(\int\limits_{(D_x)} u(\tau)\, g(\omega, y)\,\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau\right)d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} u(\tau)\, g(\xi, y)\left(\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\,\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} u(\tau)\left(\int\limits_{(D_z)} g(\xi, y)\,\varphi(z)\,d\xi\right)\left(\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\,\varphi(x)\,d\omega\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} u(\tau)\left(\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\,\varphi(x)\,d\omega\right)^2 d\tau$$

on voit qu'ils sont positifs.

Soit λ^2 un nombre caractéristique de l'équation (57) et $\varphi(x)$ la solution correspondante. Si l'on pose

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_{(D_y)} g(\tau, x)\,\varphi(y)\,d\tau$$

on trouve

$$\lambda\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\,\psi(y)\,d\tau = \lambda^2\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\left(\int\limits_{(D_z)} g(\xi, y)\,\varphi(z)\,d\xi\right)d\tau =$$

$$= \lambda^2\int\limits_{(D_z)}\varphi(z)\left(\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\, g(\xi, y)\,d\tau\right)d\xi = \lambda^2\int\limits_{(D_z)}\overline{k(\xi, x)}\,\varphi(z)\,d\xi = \varphi(x).$$

Si les carrés des nombres

(59) $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

forment la suite complète des nombres caractéristiques de l'équation (57) et si la suite

(60) $$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

est la suite correspondante des fonctions fondamentales que nous supposons normale et orthogonale, et si l'on a

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int\limits_{(D_y)} g(\tau, x)\,\varphi_k(y)\,d\tau,$$

les fonctions

(60') $$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$$

forment la suite des fonctions fondamentales de l'équation (57').

La suite (60') est normale et orthogonale. On a, en effet,

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,\psi_n(x)\,\psi_m(x)\,d\omega = \lambda_n \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,\psi_m(x)\Big(\int\limits_{(D_y)} g(\tau, x)\,\varphi_n(y)\,d\tau\Big)d\omega =$$

$$= \lambda_n \int\limits_{(D_y)} \varphi_n(y)\Big(\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,g(\tau, x)\,\psi_m(x)\,d\omega\Big)d\tau =$$

$$= \lambda_n \int\limits_{(D_y)} \varphi_n(y)\Big(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} v(\tau)\Big(\int\limits_{(D_x)} k(\omega, y)\,\psi_m(x)\,d\omega\Big)d\tau\Big)d\tau =$$

$$= \lambda_n \int\limits_{(D_y)} v(\tau)\,\varphi_n(y)\Big(\int\limits_{(D_x)} k(\omega, y)\,\psi_m(x)\,d\omega\Big)d\tau = \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\int\limits_{(D_y)} v(\tau)\,\varphi_n(y)\,\varphi_m(y)\,d\tau,$$

d'où il suit que

$$\int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,\psi_n(x)\,\psi_m(x)\,d\omega = 0, \quad \text{si } n \neq m, \quad \int\limits_{(D_x)} u(\omega)\,\psi_n^2(x)\,d\omega = 1.$$

Comme le noyau $\overline{k(\tau, x)}$ répond à la condition (D), on peut appliquer à la suite (60) les résultats du § 13.

Posons

$$F(y) = \int\limits_{(D_z)} \overline{k(\xi, y)} f(z)\, d\xi;$$

nous avons le développement

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(y), \quad c_k = \int\limits_{(D_y)} v(\tau) F(y) \varphi_k(y)\, d\tau.$$

Or on a

$$c_k = \int\limits_{(D_y)} v(\tau) F(y) \varphi_k(y)\, d\tau = \int\limits_{(D_y)} v(\tau) \varphi_k(y) \Big(\int\limits_{(D_z)} \overline{k(\xi, y)} f(z)\, d\xi \Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_z)} f(z) \Big(\int\limits_{(D_y)} \overline{k(\xi, y)} \varphi_k(\tau)\, d\tau \Big) d\xi = \frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_{(D_z)} v(\xi) f(z) \varphi_k(z)\, d\xi.$$

On en conclut que les égalités

$$\int\limits_{(D_z)} v(\xi) f(z) \varphi_k(z)\, d\xi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

entrainent l'égalité

$$\int\limits_{(D_z)} \overline{k(\xi, y)} f(z)\, d\xi = 0.$$

19. En répétant, maintenant, presque textuellement les raisonnements ordinaires on peut établir pour le noyau $k(\tau, x)$, jouissant de la propriété mentionnée au début du § 18, les théorèmes du développement analogues à celles de M. Schmidt. Si l'on a

$$\int\limits_{(D_z)} g(\xi, y) h(z)\, d\xi = 0, \tag{61}$$

on a aussi

$$\int\limits_{(D_z)} v(\xi) h(z) \varphi_k(z)\, d\xi = 0. \tag{62}$$

En effet

$$\int_{(D_z)} v(\xi)\, h(z)\, \varphi_k(z)\, d\xi = \lambda_k \int_{(D_z)} v(\xi)\, h(z) \Big(\int_{(D_y)} k(\tau, z)\, \psi_k(y)\, d\tau \Big) d\xi =$$

$$= \lambda_k \int_{(D_y)} \psi_k(y) \Big(\int_{(D_z)} \Big(\frac{1}{\xi} \int_{(\xi)} v(\xi)\, k(\tau, z)\, d\xi \Big) h(z)\, d\xi \Big) d\tau =$$

$$= \lambda_k \int_{(D_y)} \psi_k(y) \Big(\int_{(D_z)} \Big(\frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau)\, g(\xi, y)\, d\tau \Big) h(z)\, d\xi \Big) d\tau =$$

$$= \lambda_k \int_{(D_y)} u(\tau)\, \psi_k(y) \Big(\int_{(D_z)} g(\xi, y)\, h(z)\, d\xi \Big) d\tau.$$

Réciproquement, les égalités (62) entrainent l'égalité (61). Si les égalités (62) sont satisfaites, on a suivant la remarque du § 18

$$\int_{(D_z)} \overline{k(\xi, y)}\, h(z)\, d\xi = 0.$$

Il suit de là que

$$0 = \int_{(D_x)} v(\omega)\, h(x) \Big(\int_{(D_z)} h(z) \Big(\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, g(\xi, y)\, d\tau \Big) d\xi \Big) d\omega =$$

$$= \int_{(D_z)} h(z) \Big(\int_{(D_y)} g(\xi, y) \Big(\frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) \Big(\int_{(D_x)} g(\omega, y)\, h(x)\, d\omega \Big) d\tau \Big) d\tau \Big) d\xi =$$

$$= \int_{(D_z)} h(z) \Big(\int_{(D_y)} u(\tau)\, g(\xi, y) \Big(\int_{(D_x)} g(\omega, y)\, h(x)\, d\omega \Big) d\tau \Big) d\xi =$$

$$= \int_{(D_y)} u(\tau) \Big(\int_{(D_x)} g(\omega, y)\, h(x)\, d\omega \Big)^2 d\tau$$

d'où il suit, comme la fonction $u(\tau)$ répond à la condition (B), que l'égalité (61) est satisfaite.

On démontre maintenant aisément que si l'on a

$$G(x) = \int_{(D_y)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \tag{63}$$

on a aussi

$$(64) \qquad G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_{(D_x)} v(\omega)\, G(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\int_{(D_y)} u(\tau)\, \psi_k(y)\, h(y)\, d\tau}{\lambda_k}.$$

Remarquons en premier lieu que

$$\int_{(D_x)} v(\omega)\, G(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = \int_{(D_x)} v(\omega)\, \varphi_k(x) \Big(\int_{(D_y)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \Big) d\omega =$$

$$= \int_{(D_y)} h(y) \Big(\frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} u(\tau) \Big(\int_{(D_x)} g(\omega, y)\, \varphi_k(x)\, d\omega \Big) d\tau \Big) d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} u(\tau)\, h(y) \Big(\int_{(D_x)} g(\omega, y)\, \varphi_k(x)\, d\omega \Big) d\tau = \frac{1}{\lambda_k} \int_{(D_y)} u(\tau)\, h(y)\, \psi_k(y)\, d\tau.$$

En second lieu, comme on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 < \int_{(D_y)} u(\tau)\, h^2(y)\, d\tau, \quad h_k = \int_{(D_y)} u(\tau)\, h(y)\, \psi_k(y)\, d\tau$$

la série qui donne $G(x)$ est uniformément convergente, la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}$$

étant bornée, puisque le noyau $\overline{k(\tau, x)}$ répond à la condition (D).

Si l'on pose maintenant

$$G(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_{(D_x)} v(\omega)\, G(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = F(x),$$

la fonction continue $F(x)$ répond aux conditions

$$\int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, F(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

et par suite à la condition

$$\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\, F(x)\, d\omega = 0.$$

On en conclut que

$$\int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, F^2(x)\, d\omega = \int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, F(x)\, G(x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, G(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega \cdot$$

$$\int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, F(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = \int\limits_{(D_x)} v(\omega)\, F(x) \Big(\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \Big) d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} h(y) \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} u(\tau) \Big(\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\, F(x)\, d\omega \Big) d\tau \Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{(D_y)} u(\tau)\, h(y) \Big(\int\limits_{(D_x)} g(\omega, y)\, F(x)\, d\omega \Big) d\tau = 0,$$

d'où il suit que $F(x) = 0$ et que le développement énoncé subsiste.

On peut établir le théorème analogue relative au développement de la fonction

$$G(x) = \int\limits_{(D_y)} g(\tau, x)\, h(y)\, d\tau$$

en supposant que le noyau $\underline{k(\tau, x)}$ répond à la condition (D) par rapport à $u(\tau)$.

20. Pour donner un exemple, posons

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} \frac{u(\tau)}{r_{xy}}\, d\tau, \qquad g(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} \frac{d\tau}{r_{xy}}$$

r_{xy} étant la distance entre les points (x) et (y) et $u(\tau)$ une fonction répondant à la condition (B) et telle que pour chaque sphère (τ_0) du rayon ρ on a

$$u(\tau_0)\rho^{1-\lambda} < B, \quad 0 < \lambda = 1.$$

L'application du théorème du § 12 (2) donne immédiatement

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} k(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\omega)}\Bigg(\int\limits_{(\tau)}\frac{u(\tau)\, d\tau}{r_{xy}}\Bigg) d\omega = \frac{1}{\omega\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\Bigg(\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{xy}}\Bigg) d\tau =$$
$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} u(\tau)\, g(\omega, y)\, d\tau.$$

En utilisant les inégalités du § 10 (2), on voit que

$$\Bigg|\int\limits_{(\tau_0)}\frac{u(\tau)}{r_{xy}}\, d\tau\Bigg| < B\rho^{1+\lambda}, \quad \Bigg|\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau_0)}\frac{u(\tau)}{r_{xy}}\, d\tau\Bigg|\rho^{2-\lambda} < B_1.$$

Il suit de là que l'intégrale

$$\int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\frac{d\tau}{r_{zy}}$$

a un sens et que le théorème du § 12 (2) est appliquable aux fonctions $\frac{1}{r_{yz}}$ et $k(\tau, x)$. Donc, on peut écrire

$$\overline{k(\xi, x)} = \int\limits_{(D_y)} k(\tau, x)\Bigg(\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)}\frac{d\xi}{r_{zy}}\Bigg) d\tau = \frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)}\Bigg(\int\limits_{(D_y)}\frac{1}{r_{zy}}\Bigg(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\frac{u(\tau)}{r_{xy}}\, d\tau\Bigg) d\tau\Bigg) d\xi =$$
$$= \frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)}\Bigg(\int\limits_{(D_y)}\frac{u(\tau)}{r_{zy}r_{xy}}\, d\tau\Bigg) d\xi.$$

Or la fonction

$$\int\limits_{(D_y)}\frac{u(\tau)}{r_{zy}r_{xy}}\, d\tau$$

est bornée comme fonction de (x) et de (z).

Pour s'en assurer, désignons par δ la distance entre les points (x) et (z). Entourons le point (x) par une sphère (δ) du rayon (2δ) ayant pour centre le point (x). On a évidemment

$$\int_{(D_y-\delta)} \frac{u(\tau)}{r_{zy} r_{xy}} d\tau < 2 \int_{(D_y-\delta)} \frac{u(\tau)}{r^2_{xy}} d\tau,$$

la dernière intégrale ayant une limite quand $\delta \to 0$.

En divisant la sphère (δ) en deux parties par le plan équidistant des points (x) et (z), nous avons pour la partie qui contient le point (x)

$$\left| \int_{(\delta^1)} \frac{u(\tau)}{r_{zy} r_{xy}} d\tau \right| < \frac{2}{\delta} \int_{(\delta)} \frac{u(\tau)}{r_{xy}} d\tau < \frac{2}{\delta} \int_{(\delta)} \frac{u(\tau)}{r_{xy}} d\tau < \frac{2}{\delta} B (2\delta)^{1+\lambda}.$$

On peut évaluer de la même manière l'intégrale sur la partie qui contient le point (z) en remplaçant la sphère (δ) par la sphère (δ_1) du rayon (3δ) avec le centre dans le point (z). En même temps on obtient

$$\underline{k(\xi, x)} = \int_{(D_y)} g(\tau, x)\, k(\xi, y)\, d\tau = \int_{(D_y)} \left(\frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} \frac{d\tau}{r_{xy}} \right) k(\xi, y)\, d\tau =$$

$$= \int_{(D_y)} \frac{1}{r_{xy}} \left(\frac{1}{\xi} \int_{(\xi)} \frac{u(\xi)}{r_{zy}} d\xi \right) d\tau = \frac{1}{\xi} \int_{(\xi)} u(\xi) \left(\int_{(D_y)} \frac{d\tau}{r_{xy}\, r_{zy}} \right) d\xi.$$

On s'en assure en remplaçant le domaine (D_y) par le domaine $(D_y - \delta)$, (δ) étant une sphère avec le centre en (x) et en faisant tendre le rayon de la sphère vers zéro; l'intégrale

$$\int_{(\delta)} \frac{d\tau}{r_{xy}\, r_{zy}}$$

est, en effet, infiniment petit avec le rayon de la sphère.

Si

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

sont les racines carrées des nombres caractéristiques de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_{(D_z)} \overline{k(\xi, x)}\, \varphi(z)\, d\xi = \lambda^2 \int_{(D_z)} \left(\int_{(D_y)} \frac{u(\tau)}{r_{zy}\, r_{xy}} d\tau \right) \varphi(z)\, d\xi$$

et si

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

sont les fonctions fondamentales qui leurs correspondent,

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\psi_n(x),\ \ldots$$

étant les fonctions fondamentales correspondantes de l'équation

$$\psi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(D_z)} u(\xi) \int\limits_{(D_y)} \frac{d\tau}{r_{xy}\, r_{zy}} \psi(z)\, d\xi,$$

on a pour chaque fonction

$$G(x) = \int\limits_{(D_y)} \frac{u(\tau)\, h(y)}{r_{yx}}\, d\tau$$

où $h(y)$ est une fonction continue, le développement

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \int\limits_{(D_x)} G(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\int\limits_{(D_y)} u(\tau)\, h(y)\, \psi_k(y)\, d\tau}{\lambda_k},$$

qui est absolument et uniformément convergent.

21. Pour un second exemple reprenons le probléme du § 15(3). Il s'agissait de la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{65}$$

sous les conditions sur les frontières

$$u(0,t) = 0, \quad q u_x''(b,t) + p u(b,t) + u_x'(b,t) = 0 \tag{66}$$

et sous les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t'(x,0) = F(x), \tag{67}$$

$f(x)$ et $F(x)$ étant deux fonctions continues dans l'intervalle $(0, b)$.

En cherchant à satisfaire au problème par la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, W_k(x),$$

nous avons réduit le problème à la résolution des équations: de l'équation

$$T_k'' + a^2 \rho_k^2 T_k = 0$$

et de l'équation

$$W_k''(x) + \rho_k^2 W_k(x) = 0,$$

le dernier problème sous les conditions:

(68) $$W_k(0) = 0, \quad q W_k''(b) + W_k'(b) + p W_k(b) = 0$$

ou

$$W_k'(b) + (p - q\rho_k^2) W_k(b) = 0.$$

Nous avons montré que pour les fonctions $W_k(x)$ on peut prendre les fonctions fondamentales $V_k(x)$ de l'équation

(69) $$\varphi(x) = \lambda \int_0^b u(\tau) K(x, y) \varphi(y) d\tau + f(x)$$

dans laquelle (τ) est un intervalle (α, β) appartenant à l'intervalle (ab), $u(\tau)$ une fonction moyenne additive et à variation bornée égale à

$$1 + w(\tau),$$

où

$$w(\tau) = 0, \text{ si } \beta < b, \quad w(\tau) = \frac{q}{\tau}, \quad \text{si } \beta = b.$$

La fonction $K(y, x)$ est égale à

$$\frac{x(1 + p(b - y))}{1 + pb}, \quad \text{si } x < y, \quad \frac{y(1 + p(b - x))}{1 + pb}, \quad \text{si } x > y.$$

Les nombres

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, \ldots$$

sont les solutions de l'équation.

(70) $$\operatorname{tg} \rho b = \frac{\rho}{q\rho^2 - p}$$

et la fonction fondamentale $V_n(x)$, correspondante au nombre caractéristique ρ_n^2, est égale à

$$V_n(x) = c_n \sin \rho_n x, \quad c_n^2 = \frac{1}{\frac{b}{2} - \frac{1}{4\rho_n} \sin 2\rho_n b + q \sin^2 \rho_n b}. \tag{71}$$

La suite des fonctions $V_n(x)$ est orthogonale et normale, c'est-à-dire on a

$$\int_0^b u(\omega) V_n(x) V_m(x) d\omega = 0, \quad n \neq m, \quad \int_0^b u(\omega) V_n^2(\omega) d\omega = 1.$$

Remarquons en premier lieu que, si l'on a

$$\varphi(x) = -\int_0^b u(\tau) K(x, y) h(y) d\tau, \tag{72}$$

la fonction $h(y)$ étant continue, on a

$$\varphi(x) = -\int_0^b K(x, y) h(y) dy - qk(x, b) h(b) = -\int_0^b K(x, y) h(y) dy - \frac{qx}{1+pb} h(b).$$

Or, l'intégrale

$$-\int_0^b K(x, y) h(y) dy$$

étant égale à la fonction $\psi(x)$ répondant aux conditions

$$\psi''(x) = h(x), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(b) + p\psi(b) = 0$$

on voit immédiatement que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$\varphi''(x) = h(x) \tag{73}$$

et aux conditions

$$\varphi(0) = 0, \quad q\varphi''(b) + \varphi'(b) + p\varphi(b) = 0. \tag{74}$$

Réciproquement, si la fonction continue $\varphi(x)$ répond aux conditions (74) ayant une dérivée seconde continue dans $(0, b)$, l'intégrale

$$-\int_0^b u(\tau) K(x, y) \varphi''(y) d\tau \tag{75}$$

est égale à $\varphi(x)$; en la supposant égale à $\varphi(x) + \omega(x)$ on trouve immédiatement que

$$\omega(x) = ax + b;$$

la première des conditions (74) donne alors $b = 0$; la seconde conduit à l'égalite $a = 0$. Supposons maintenant que le problème principal a une solution $u(x, t)$, dans laquelle la fonction $u(x, t)$ a une dérivée $u_{tt}''(x, t)$ prise deux fois par t qui est continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq b$.

On en conclut, qu'on a

$$a^2 u(x, t) = -\int_0^b u(\tau) K(y, x) u_{tt}''(y, t) d\tau, \tag{76}$$

car la fonction ainsi définie satisfait à l'équation (65) et aux conditions (66). D'après le § 14 la fonction de la forme (76) est développable dans une série

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_t(t) V_k(x) \tag{77}$$

où

$$g_k(t) = \int_0^b u(\omega) u(x, t) V_k(x) d\omega = -\frac{1}{a^2} \frac{\int_0^b u(\tau) u_{tt}''(y, t) V_k(y) d\tau}{\rho_k^2} =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \frac{h_k(t)}{\rho_k^2}.$$

Or la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k^2(x)}{\rho_k^4}$$

est uniformément convergente et l'inégalité

$$a^4\left(\sum_{k=n}^{k=m} g_k(t)\, V_k(x)\right)^2 = \left(\sum_{k=n}^{k=m} h_k(t)\,\frac{V_k(x)}{\rho_k^2}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} h_k^2(t) \sum_{k=n}^{k=m} \frac{V_k^2(x)}{\rho_k^4} <$$

$$< \int_0^b u(\tau)\,(u_{tt}''(y,t))^2\, d\tau \sum_{k=n}^{k=m} \frac{V_k^2(x)}{\rho_k^4}$$

montre, que la série (77) est uniformément convergente comme fonction de (x) et de (t).

En appliquant à (76) le théorème du § 8 (2) (ayant changé $u(\tau)K(y,x)$ en

$$v(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\,K(y,x)\,d\tau,$$

nous obtenons

$$a^2\int_0^t u(x,t)\,dt = -\int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\left(\int_0^t u_{tt}''(y,t)\,dt\right)d\tau =$$

$$= -\int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\,u_t'(y,t)\,d\tau + \int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\,F(y)\,d\tau,$$

(78) $$a^2\int_0^t\int_0^t u(x,t)\,dt^2 = -\int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\,u(y,t)\,dt +$$

$$+\int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\,f(y)\,dt + t\int_0^b u(\tau)\,K(y,x)\,F(y)\,d\tau.$$

En substituant dans (78) la série (77) et en posant

$$b_k = \int_0^b u(\omega)\,F(x)\,V_k(x)\,d\omega, \quad a_k = \int_0^b u(\omega)\,f(x)\,V_k(x)\,d\omega$$

on trouve

$$a^2 \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \int_0^t \int_0^t g_k(t)\, dt^2 = -\int_0^b u(\tau) K(y,x) \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(y)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k V_k(x)}{\rho_k^2} + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k V_k(x)}{\rho_k^2}.$$

Il suit de la que

$$a^2 \int_0^t \int_0^t g_k(t)\, dt^2 = -\frac{g_k(t)}{\rho_k^2} + \frac{a_k}{\rho_k^2} + t\frac{b_k}{\rho_k^2}.$$

La dernière égalité montre en premier lieu qu'on a $g_k(0) = a_k$, $g_k'(0) = b_k$ et que, en second lieu, on a

$$g_k''(t) + a^2 \rho_k^2 g_k(t) = 0.$$

On trouve ainsi

$$g_k(t) = a_k \cos(a\rho_k t) + \frac{b_k}{a\rho_k} \sin(a\rho_k t).$$

Ainsi, si le problème a une solution dans laquelle la dérivée $u_{tt}''(x, t)$ existe et est une fonction continue dans l'intervale $0 \leqq x \leqq b$, cette solution est donnée par la série

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k \cos(a\rho_k t) + \frac{b_k}{a\rho_k} \sin(a\rho_k t) \right) V_k(x) \tag{79}$$

et cette série doit être uniformément convergente comme fonction de x et de t. Si la fonction $f(x)$ a la dérivée seconde $f''(x)$ qui est continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq b$ et si l'on a

$$f(0) = 0, \quad qf''(b) + f'(b) + pf(b)\, 0,$$

la série (79) jouit de la convergence mentionnée.

En effet, comme on a dans ce cas:

$$f(x) = -\int_0^b u(\tau) K(y,x) f''(y)\, d\tau,$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k V_k(x)$$

est absolument et uniformément convergente; il suit de là la convergence absolue et uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(a\rho_k t) V_k(x).$$

On s'assure aisément que dans chaque intervalle

$$\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{b}, \quad \frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{b}\right), \qquad k=1, 2, 3\ldots$$

est placée une et une seule racine positive de l'équation (70): il suit de là qu'on a

$$\rho_k > \frac{2k-1}{2}\cdot\frac{\pi}{b}.$$

Les égalités (71) montrent que c_n ayant pour $n \to 0$ la limite égale à $\sqrt{\frac{2}{b}}$, les fonctions $V_k(x)$ sont bornées par un nombre c.

Il suit de là que

$$\frac{1}{a^2}\left(\sum_{k=n}^{k=m}\left|\frac{b_k}{\rho_k}\sin(a\rho_k t) V_k(x)\right|\right)^2 < \frac{c^2}{a^2}\sum_{k=n}^{k=m} b_k^2 \cdot \sum_{k=n}^{k=m}\frac{1}{(2k-1)^2}\frac{4b^2}{\pi^2},$$

ce qui montre que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{a\rho_k}\sin(a\rho_k t) V_k(x)$$

est aussi absolument et uniformément convergente.

22. Supposons maintenant que la série

(79′) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(a\rho_k t)+\frac{b}{a\rho_k}\sin(a\rho_k t)\right)V_k(x)$$

est uniformément convergente et désignons sa somme par $u(x, t)$.

Étant donnée une fonction $\varphi(t)$, posons

(80) $$R(\varphi(t))=\frac{1}{h^2}\{\varphi(t+h)-2\varphi(t)+\varphi(t-h)\}.$$

La série (79′) étant uniformément convergente, la série

$$R(u(x, t))=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k R(\cos(a\rho_k t))+\frac{b_k}{a\rho_k}R(\sin(a\rho_k t))\right]V_k(x)$$

l'est aussi.

En évaluant

(81) $$-\int_0^b u(\tau)K(y, x)R(u(y, t))\,d\tau$$

on obtient à cause de la convergence uniforme de la série (79′), que l'intégrale (81) est égale à

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k R(\cos(a\rho_k t))+\frac{b_k}{a\rho_k}R(\sin(a\rho_k t))\right]\frac{V_k(x)}{\rho_k^2}=$$

$$=\frac{a^2}{h^2}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}}\left(\int_{t_1-\frac{h}{2}}^{t_1+\frac{h}{2}}u(x, t_2)\,dt_2\right)dt_1.$$

On a donc, l'égalité

(82) $$\frac{a^2}{h^2}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}}\left(\int_{t_1-\frac{h}{2}}^{t_1+\frac{h}{2}}u(x, t_2)\,d\tau_2\right)dt_1=-\int_0^b u(\tau)K(y, x)R(u(y, t))\,d\tau.$$

Remarquons que si la fonction (80) a une limite pour $h \to 0$ qui est une fonction continue de t, cette limite est égale à la dérivée seconde de $\varphi(t)$.

En effet si

$$\lim \frac{1}{h^2}\{\varphi(t+h) - 2\varphi(t) + \varphi(t-h)\} = f(t)$$

et si l'on pose

$$\varphi(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2\right) dt_1 + \omega(t)$$

on trouve

$$R(\varphi(t)) = \frac{1}{h^2}\left\{\int_t^{t+h} \left(\int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2\right) dt_1 + \int_t^{t-h} \left(\int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2\right) dt_1\right\} + R(\omega(t)).$$

En appliquant la règle de l'Hospital on trouve

$$\lim \frac{1}{h^2}\left\{\int_t^{t+h} \left(\int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2\right) dt_1 + \int_t^{t-h} \left(\int_0^{t'} f(t_2)\,dt_2\right) dt_1\right\} =$$

$$= \lim \frac{1}{2}\left\{f(t+h) + f(t-h)\right\} = f(t), \quad h \to 0,$$

d'où il suit que

$$\lim R(\omega(t)) = 0, \quad \omega(t) = at + b$$

et

$$f(x) = \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2}.$$

Si nous supposons maintenant que $R(u(x, t))$ tend uniformément dans l'intervalle $0 \leq x \leq b$ vers une limite, qui est une fonction continue de (x) et de t, c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de l'intervalle $0 \leq x \leq b$ on a

$$\left|R(u(x, t)) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right| < \varepsilon, \quad \text{si } |h| < h_0,$$

on trouve en passant vers la limite dans (82) que

$$a^2 u(x, t) = -\int_0^b u(\tau) K(y, x) u_{tt}''(y, t)\, d\tau \tag{83}$$

d'où il suit que la fonction $u(x, t)$ a une dérivée seconde par rapport à x et qu'on a

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

L'égalité (83) montre de plus que la fonction (83) satisfait aux conditions (66). Ainsi la série (79') donne la solution du problème, si elle est uniformément convergente et si, $u(x, t)$ étant sa somme, $R(u(x, t))$ tend uniformément dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq b$ vers une limite, qui est continue comme fonction de x et de t.

CHAPITRE 5

Sur quelques points de la théorie du potentiel

1. La surface (S') est dite de Liapounoff si elle satisfait aux troi conditions:

1) On peut construire dans chaque point de (S') le plan tangent déterminé et par conséquent la normale N à la surface en ce point.

2) Si ϑ est l'angle entre les normales à (S') aux points m_1 et m_2 et si r est la distance entre les points m_1 et m_2, on a

$$\vartheta < E r^{\lambda}, \qquad 0 < \lambda \leqq 1 \tag{1}$$

E et λ étant les nombres déterminés.

3) Il existe un nombre d jouissant de la propriété: quel que soit le point m sur (S'), les droites parallèles à la normale en m coupent (S') dans l'intérieur de la sphère du rayon d ayant le centre dans le point m, dans un point au plus.

Nous donnerons à cette sphère le nom de la sphère de Liapounoff.

On démontre sans peine, que si (S') est une surface de Liapounoff et si

$$(1') \qquad Ed^{\lambda} < \frac{1}{2},$$

on peut trouver un nombre ω, jouissant de la propriété: chaque droite, qui fait avec la normale en m un angle moindre que ω, coupe la surface dans l'intérieur de la sphère de Liapounoff, attachée au point m, en un point au plus; on peut poser

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{Ed^{\lambda}} - \frac{1}{2} Ed^{\lambda}.$$

En choisissant d suffisamment petit, on peut faire ω aussi près de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le veut. Si ω est plus grand que $\frac{\pi}{3}$, les parallèles à l'une des axes des coordonnées coupent (S') dans l'intérieur de la sphère en un point au plus, quel que soit le système des coordonnées.

Soit r_{10} la distance entre deux points m et m_1 sur (S'). Supposons, que r_{10} est dirigée du point m vers le point m_1. Si N_1 est la normale à (S') en m_1 et N_0 la normale à (S') en m, on a

$$(3) \qquad |\cos(r_{10} N_1)| < a r_{10}^{\lambda}, \quad |\cos(r_{10} N_0)| < a r_{10}^{\lambda},$$

a étant un nombre déterminé.

Dans l'intérieur de la sphère de Liapounoff, attachée au point m, on a

$$(4) \qquad |\cos(N_1, N_0)| > \frac{1}{2}.$$

En parlant des domaines limités par les surfaces de Liapounoff nous supposons toujours, que la frontière (S) divise l'espace en deux portions, dont l'une au moins est connexe.

La portion de l'espace, connexe ou non, qui contient le point à l'infini, sera désignée par $(D^{(e)})$; le reste de l'espace, connexe ou non, sera désigné par $(D^{(i)})$. La normale à (S) dans chaque point sera dirigée dans $(D^{(e)})$.

Nous dirons que nous avons affaire:

α) Au cas ordinaire, si la frontière de $(D^{(i)})$ est formée par une seule surface fermée (S); dans ce cas chacun des domaines $(D^{(i)})$ et $(D^{(e)})$ est connexe.

β) Au cas (I), si ($D^{(i)}$) est limité par une surface ($S^{(0)}$) formant la frontière extérieure et par k surfaces fermées ($S^{(1)}$), . . . , ($S^{(k)}$), qui forment les frontières intérieures; dans ce cas ($D^{(i)}$) est connexe, ($D^{(e)}$) ne l'est pas.

γ) Au cas (E), quand ($D^{(i)}$) n'est pas connexe, étant limité par plusieurs surfaces fermées ($S^{(1)}$), . . . , ($S^{(k)}$).

2. Rappelons nous quelques théorèmes de la théorie du potentiel. Convenons de désigner par $\mu(0)$, $\mu(1)$, . . . les fonctions des points

$$(x),\ (x_1),\ \ldots,$$

dont les coordonnées sont désignées par les lettres

$$(\xi, \eta, \zeta),\ (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \ldots$$

respectivement.

En désignant par (x_1) le point d'intégration, désignons par (S_1) la surface sur laquelle l'intégration est étendue, la surface étant le lieu géométrique des points (x_1); par N_0, N_1, . . . nous désignerons les normales à (S) aux points (x), (x_1), . . .

a) L'intégrale

$$V = \int\limits_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \tag{5}$$

qui donne le potentiel de double couche, dans laquelle μ est bornée et intégrable, est absolument et uniformément convergente, si le point (x) est situé sur (S).

En désignant par (S) la frontière des domaines, nous entendons sous le signe (5) dans le cas (I) la somme

$$\int\limits_{(S_1^{(0)})} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \sum_{l=1}^{l=k} \int\limits_{(S_1^{(l)})} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

et dans le cas (E) la somme

$$\sum_{l=1}^{l=k} \int\limits_{(S^{(l)})} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

L'intégrale (5) est une fonction qui est régulièrement continue quand le point (x) est sur (S).

Nous disons que la fonction $f(x)$ est régulièrement continue dans un domaine ou sur une surface, si pour chaques deux points (x) et (x_1) dans ce domaine ou sur cette surface à la distance égale à r_{10} on a

$$|f(x_1) - f(x)| < A r_{10}^{\lambda}, \qquad 0 < \lambda \leqq 1.$$

Remarque. Si la foncion $f(x)$ est régulièrement continue dans l'intérieur d'un domaine (D), la variable $f(x)$ a une limite quand le point (x) en se déplaçant tend vers un point m_0 sur la frontière de (D) et cette limite est indépendante du chemin suivi par le point (x).

Nous disons que la fonction $f(x)$ est continue au point (x_0), si, quel que soit le nombre positif ε, il existe un domaine (r_ε), découpé de (S) par une sphère à rayon r_ε, ayant son centre au point (x_0), tel que pour tous les points (x) de (r_ε) on a

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

nous désignons par (r_ε) la portion de (S) découpée par la sphère mentionnée.

Si le point (x_2) est situé dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ ou dans l'intérieur de $(D^{(e)})$ et tend vers le point (x) sur (S), dans lequel la fonction μ (0) est continue, on a

$$(6) \quad \lim \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{12}^2} d\sigma_1 = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \pm 2\pi \mu(0), \ (x_2) \to (x)$$

où il faut prendre le signe (+), si le point (x_2) est dans $(D^{(i)})$, et le signe (—), si le point (x_2) est dans $(D^{(e)})$.

Effectivement, lors la démonstration c'est seulement la valeur de $|\mu(x) - \mu(x_0)|$ est en jeu et cette valeur est infiniment petite, si μ est continue en point (x_0).

Si la fonction μ est régulièrement continue sur (S), on a

$$\left| \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{12}^2} d\sigma_1 - \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \mp 2\pi \mu(0) \right| < a A \delta^{\lambda},$$

δ étant la distance entre les points (x_2) et (x), A la borne supérieure de $|\mu|$ et a un nombre déterminé. Dans ce cas l'intégrale (5) est régulièrement continue dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ et dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

b) L'intégrale de Gauss

(7) $$\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

est égale à 4π, si le point (x) est situé dans $(D^{(i)})$; elle est égale à zéro, si le point (x) est situé dans $(D^{(e)})$ et à 2π, si le point (x) est situé sur (S). En effet, si, par exemple, dans le cas *(1)*, (x) est situé dans le domaine limité par une surface $(S^{(i)})$, l'intégrale de Gauss, étendue sur $(S^{(0)})$, est égale à 4π et, étendue sur $(S^{(i)})$, est égale à -4π, car la normale à $(S^{(i)})$ est dirigée dans l'intérieur du domaine que nous considérons.

On démontre de même l'exactitude de notre assertion pour les autres positions du point (x).

c) Étant donné le potentiel de simple couche

(8) $$\int_{(S_1)} \frac{\mu \, d\sigma_1}{r_{10}},$$

si la densité μ est continue au point (x), (x) étant sur (S), on a

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{dV}{dn} + 2\pi\mu(0), \quad \frac{dV_e}{dn} = \frac{dV}{dn} - 2\pi\mu(0)$$

en posant

$$\frac{dV}{dn} = \int_{(S_1)} \frac{\mu \cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1;$$

$\mu(0)$ est ici la valeur de μ au point (x) et

$$\frac{dV_i}{dn}, \frac{dV_e}{dn}$$

sont les limites des dérivées

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{x'} = \frac{\partial V}{\partial \xi'} \cos(N_0 \xi) + \frac{\partial V}{\partial \eta'} \cos(N_0 \eta) + \frac{\partial V}{\partial \zeta'} \cos(N_0 \zeta),$$

qui sont calculées dans un point (x') sur la normale à (S) au point (x), vers lesquelles ces dérivées tendent quand le point (x') s'approche à (x) du côté intérieur, respectivement, du côté extérieur de (S).

C'est seulement la valeur de la différence $\mu(x') - \mu(x)$ qui intervient lors la démonstration du théorème, d'où suit que la continuité de la fonction μ au point (x) suffit pour achever la démonstration.

L'intégrale (8) est uniformément et absolument convergente si le point (x) est sur (S), sous la seule condition que μ est bornée et intégrable.

Si μ est régulièrement continue sur (S), on a

$$\left|\left(\frac{dV}{dn}\right)_{x'} - \frac{dV_i}{dn}\right| < a A\delta^\lambda, \quad \left|\left(\frac{dV}{dn}\right)_{x'} - \frac{dV_e}{dn}\right| < a A\delta^\lambda,$$

δ étant la distance entre les points (x') et (x), A la borne supérieure de μ et a un nombre déterminé. Dans ce cas les dérivées de l'intégrale (8) sont régulièrement continues dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ et dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

3. Envisageons la suite des réseaux des intervalles

$$(9) \qquad R_1, \ R_2, \ \ldots, \ R_n, \ \ldots$$

qui est introduite dans le § 1 (1). Supposons que ν est choisi de manière que chaque intervalle de R_ν, ayant un point commun avec (S), est tout entier dans l'intérieur de la sphère de Liapounoff, attachée à ce point. Nous dirons que les portions de (S) contenues dans les intervalles de R_n, $n > \nu$, sont les intervalles situés sur (S). En définissant un domaine des points situés sur (S) il suffit d'envisager les domaines contenus dans les sphères de Liapounoff. En choisissant convenablement une des axes des coordonnées on parvient à ce que les droites, parallèles à cette axe, coupent (S) dans l'intérieur de la sphère choisie en un point au plus. En projettant les frontières des intervalles du réseau R_n sur le plan des coordonnées, qui est perpendiculaire à l'axe que nous avons choisi, on obtient les réseaux des intervalles plans, propres à mesurer les projections des domaines des points sur (S), qui sont placés dans l'intérieur de la sphère de Liapounoff mentionnée. La portion de (S), découpée par les frontières d'un intervalle R_ν, est un domaine (σ_ν).

Soit donné dans l'espace un domaine (ω) contenu dans un intervalle (i) de R_ν. Envisageons dans chaque réseau R_n, $n > \nu$, les intervalles, ayant les points communs avec (ω), et les intervalles, contenus dans l'intérieur de (ω); leurs ensembles forment les polyèdres $P_n^{(e)}$ et $P_n^{(i)}$ — le polyèdre qui contient le domaine (ω) et le polyèdre qui est contenu dans (ω); le domaine (ω) est la limite commune des polyèdres $P_n^{(e)}$, $P_n^{(i)}$ pour $n \to \infty$. Désignons par (σ_0) une portian de (S) contenant dans son intérieur (σ_ν),

(σ_v) étant la portion de (S) découpée par (i). Les points de (σ_0), qui n'appartiennent pas à $P_n^{(e)}$ et $P_n^{(i)}$, forment les domaines $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$, $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$, le second contenant le premier. Quand n croît, $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$ croît et $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$ décroît; il suit de là qu'ils ont les limites. Les ensembles fermés, formés par ces ensembles limites et leurs points limites, sont identiques. Supposons que (x) est un point qui n'appartient pas à l'ensemble limite de $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$ et est un point de l'ensemble limite de $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$. Traçons par (x) une droite parallèle à une des axes des coordonnées; il y a des points d'intersection de cette droite avec les frontières des $P_n^{(e)}$ et $P_n^{(i)}$, qui tendent à se confondre quand $n \to \infty$; il suit de là, que la distance de (x) de la frontière de $P_n^{(e)}$ est infiniment petite et que (x) est le point limite de l'ensemble limite de $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$.

On conclut de là que cet ensemble limite avec ses points limites forme un domaine. Sa frontière est, précisément, contenue entre $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$ et $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$; les projections des points de cette différence sur un plan des coordonnées remplissent un nombre fini des intervalles; on peut faire cette différence moindre qu'un nombre donné ε, d'où suit que la mesure des intervalles sur (S) qui contiennent sa frontière est moindre que 2ε.

En désignant par $(\sigma_0 - \sigma)$ le domaine limite de $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$ nous concluons, que si la mesure de $(\sigma_0 - \sigma)$ est plus petite que celle de (σ_0), la différence $(\sigma_0) - (\sigma_0 - \sigma) = (\sigma)$ est un domaine. Nous dirons dans ce cas, que (σ) est la portion de (S) contenu dans (ω). Si la mesure de $(\sigma_0 - \sigma)$ est égale à ϖ_0, les points communs à (ω) et à (S) ne forment pas un domaine, étant les points limites du domaine (σ_0). Comme les limites de $(\sigma_0 - \sigma_n^{(e)})$ et $(\sigma_0 - \sigma_n^{(i)})$ sont égales, (σ) est la limite de $(\sigma_n^{(i)})$ et de $(\sigma_n^{(e)})$.

Si l'on décompose le domaine (ω) en deux domaines (ω_1) et (ω_2) et si (ω_1) contient la portion (σ_1) de (S) et (ω_2) la portion (σ_2), on a

$$(\sigma) = (\sigma_1) + (\sigma_2).$$

En effet, $(\sigma_{1n}^{(e)})$, $(\sigma_{1n}^{(i)})$, $(\sigma_{2n}^{(e)})$, $(\sigma_{2n}^{(i)})$ ayant pour (ω_1) et (ω_2) la même signification que $(\sigma_n^{(e)})$, $(\sigma_n^{(i)})$ pour (ω), on a

$$(10) \qquad (\sigma_{1n}^{(i)}) + (\sigma_{2n}^{(i)}) \leqq \sigma_n^{(i)}, \quad (\sigma_{1n}^{(e)}) + (\sigma_{2n}^{(e)}) \geqq \sigma_n^{(e)}$$

d'où il suit

$$(\sigma_1) + (\sigma_2) \geqq (\sigma), \quad (\sigma_1) + (\sigma_2) \leqq (\sigma)$$

c'est-à-dire

$$(\sigma_1) + (\sigma_2) = (\sigma).$$

4. En désignant par (σ) les domaines des points sur (S), supposons que $\mu(\sigma)$ est une fonction additive et à variation bornée de ces domaines. Posons

$$V = \int\limits_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1)\, d\sigma_1}{r_{10}}, \tag{11}$$

en désignant par (σ_1) le domaine (σ) traité comme le lieu géométrique des points (x_1) de l'intégration et par r_{10} la distance entre le point (x) et les points (x_1). Nous supposerons toujours que r_{10} est dirigée du point (x) vers le point (x_1). L'intégrale (11) comme fonction des points (x) est définie dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ et dans l'intérieur de $(D^{(e)})$. En parlant de V nous dirons que c'est un potentiel de simple couche en intégrales de Stieltjes. Le potentiel de simple couche est évidemment une fonction harmonique dans l'intérieur de chaque domaine (D_1) n'ayant pas des points communs avec (S). En désignant par (ξ, η, ζ) les coordonnées du point (x) et par (ξ_1, η_1, ζ_1) les coordonnées du point (x_1), on démontre précisément sans peine, que si (x) est dans l'intérieur de (D), on a

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\xi_1 - \xi}{r_{10}^3}\, d\sigma_1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{10}}}{\partial \xi^2}\, d\sigma_1, \ \ldots$$

Introduisons une fonction des domaines (ω) de l'espace en posant:

1) $u(\omega) = 0$, si (ω) ne contient pas les points (x) qui sont dans l'intérieur de $(D^{(i)})$;

2) $u(\omega) = 0$, si tous les points de (ω) sont dans l'intérieur de $(D^{(i)})$;

3) $u(\omega) = 0$, si tous les points de (ω) appartiennent à $(D^{(i)})$ et si les points communs à (ω) et à (S) ne forment pas un domaine.

4) $u(\omega) = \frac{\mu(\sigma)\sigma}{\omega}$, si tous les points de (ω) appartiennent à $(D^{(i)})$ et si les points communs à (ω) et à (S) forment le domaine (σ).

Enfin, si le domaine (ω) est tel qu'il y a des points situés dans l'intérieur de $(D^{(e)})$ et dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, la surface (S) le divise en

deux domaines $(\omega^{(\prime)})$, $(\omega^{(\prime\prime)})$. Si $(\omega^{(\prime\prime)})$ est la portion de (ω), qui appartient à $(D^{(i)})$, posons

5) $u(\omega) = \frac{u(\omega'')\,\omega''}{\omega} = \frac{\mu(\sigma)\,\sigma}{\omega}$, (σ) étant la portion commune à (S) et à (ω'').

On démontre sans peine que la fonction moyenne $u(\omega)$ est additive et à variation bornée. Pour s'en assurer il suffit d'envisager seulement les domaines (ω), qui contiennent quelques portions (σ) de (S). Supposons, que (ω) est égal à la somme de deux domaines (ω_1), (ω_2). La surface (S) divise (ω) en deux portions $(\omega^{(\prime)})$) et $(\omega^{(\prime\prime)})$; elle divise, éventuellement, chaque domaine (ω_1) et (ω_2) en deux portions $(\omega_1^{(\prime)})$, $(\omega_1^{(\prime\prime)})$ et $(\omega_2^{(\prime)})$, $(\omega_2^{(\prime\prime)})$ et on a

$$(12) \qquad (\omega^{(\prime)}) = (\omega_1^{(\prime)}) + (\omega_2^{(\prime)}); \quad (\omega^{(\prime\prime)}) = (\omega_1^{(\prime\prime)}) + (\omega_2^{(\prime\prime)}).$$

Comme on a, les domaines $(\omega^{(\prime\prime)})$, $(\omega_1^{(\prime\prime)})$, $(\omega_2^{(\prime\prime)})$ appartenant à $(D^{(i)})$,

$$u(\omega) = \frac{\mu(\sigma)\,\sigma}{\omega}, \quad u(\omega_1) = \frac{\mu(\sigma_1)\,\sigma_1}{\omega_1}, \quad u(\omega_2) = \frac{\mu(\sigma_2)\,\sigma_2}{\omega_2},$$

(σ), (σ_1) et (σ_2) étant les portions de (S) contenues dans (ω''), (ω_1''), (ω_2''), et la seconde des égalités (12) donne $(\sigma) = (\sigma_1) + (\sigma_2)$, on a

$$\mu(\sigma)\,\sigma = \mu(\sigma_1)\,\sigma_1 + \mu(\sigma_2)\,\sigma_2$$

d'où il suit

$$u(\omega)\,\omega = u(\omega_1)\,\omega_1 + u(\omega_2)\,\omega_2$$

Enfin, (ω) étant divisé en portions $(\omega_1), \ldots (\omega_n)$, on a

$$\Sigma\,|u(\omega_i)|\,\omega_i = \Sigma\,|\mu(\sigma_i)|\,\sigma_i < M(\sigma)\,\sigma,$$

si $M(\sigma)$ est la variation moyenne de $\mu(\sigma)$; ici (σ_i) désigne la portion de (S) qui est contenue dans (ω_i''), où (ω_i'') est la portion de (ω_i) formée par les points appartenants à l'intérieur de $(D^{(i)})$ et par leurs points limites.

Formons maintenant le potentiel newtonien

$$(13) \qquad P = \int_{(D_1^{(i)})} u(\omega_1)\,\frac{d\omega_1}{r_{10}}\,.$$

La fonction $u(\omega_1)$ étant égale à zéro pour chaque domaine, n'ayant pas les points communs avec (S), l'intégrale (13) a un sens, si le point (x)

est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ où de $(D^{(e)})$. En supposant que le point (x) a la position mentionnée, nous avons que P est la limite de la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} u(\omega_1^{(i)}) \frac{\omega_1^{(i)}}{r_{i,0}} \tag{14}$$

les domaines $(\omega_1^{(i)})$ étant les portions de $(D_1^{(i)})$ et $r_{i,0}$ étant la distance entre le point (x) et le point $(x_1^{(i)})$, placé dans $(\omega_1^{(i)})$ d'une manière quelconque. En décomposant (S_1) en portions $(\sigma_1^{(1)}), \ldots (\sigma_1^{(m)})$, en choisissant

$$(\omega_1^{(1)}), \ldots (\omega_1^{(m)})$$

de manière, qu'ils contiennent respectivement ces portions de (S) et en prenant les points $(x_1^{(i)})$ dans ces domaines sur (S), nous obtenons pour la somme (14) l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=m} \mu(\sigma_1^{(i)}) \frac{\sigma_1^{(i)}}{r_{i0}},$$

d'où il suit, que

$$\int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} = \int\limits_{(D_1^{(i)})} u(\omega_1) \frac{d\omega_1}{r_{10}}.$$

Nous avons démontré dans le chapitre 2, que si, pour chaque sphère (ω_0) du rayon r_0, le produit $u(\omega_0)\, r_0^{2-\lambda}$ est borné, l'intégrale (13), c'est-à-dire l'intégrale (11), est une fonction continue de (x) dans tout l'espace.

Soit (x_0) un point situé sur (S). Construisons une sphère du rayon r_0, ayant le point (x_0) pour centre. Nous avons, (σ_0) étant la portion de (S) découpée par la sphère,

$$\sigma_0 = \int\limits_{(\sigma_0)} d\sigma = \int\limits_{(\sigma_0')} \frac{d\sigma_0'}{\cos(N N_0)},$$

(σ_0') étant la projection de (σ_0) sur le plan tangent à (S) en (x_0) et N_0 la normale au point (x_0).

La projection sur ce plan de la distance de (x_0) jusque la frontière de (σ_0) est plus grande que $\frac{1}{2}r_0$, car

$$r_0 \cos\alpha = r_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > r_0 \sin\omega > \frac{1}{2} r_0,$$

où ω est le nombre mentionné dans le § 1; on trouve donc

$$\frac{\pi r_0^2}{4} < \sigma_0 < 2\pi r_0^2, \quad \sigma_0 = a r_0^2, \quad a > \frac{\pi}{4}.$$

Supposons, que pour chaque sphère du rayon r_0 on a

(15) $$M(\sigma_0) r_0^{1-\lambda} < B,$$

$M(\sigma)$ étant la variation moyenne de $\mu(\sigma)$.

Supposons, que (ω) est la sphère d'un rayon r; soit (σ) la portion de (S) contenue dans (ω) et supposons que (σ) est dans l'intérieur d'une sphère du rayon r_0, construite autour d'un de ses points; r_0 est moindre que $2r$. Nous avons

$$U(\omega) < \frac{M(\sigma)\sigma}{\omega} < \frac{M(\sigma_0)\sigma_0}{\omega} < \frac{B r_0^{\lambda-1}\, 2\pi r_0^2}{\omega} =$$

$$= \frac{2\pi B r_0^{1+\lambda}}{\omega} < \frac{2\pi B.4 r^{1+\lambda}}{\frac{4\pi}{3} r^3} < bB r^{\lambda-2}.$$

Il suit de là, que

(16) $$U(\omega) r^{2-\lambda} < bB = B_1.$$

L'inégalité (16) montre que le potentiel (11) est une fonction continue dans tout l'espace, si la condition (15) est satisfaite.

On démontre facilement que l'inegalité (16) entraine l'inégalité (15). Si $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ sont les parties positive et négative de $u(\omega)$, on a

$$u_1(\omega_0) r_0^{2-\lambda} < B_1, \quad u_2(\omega_1) r_0^{2-\lambda} < B_1.$$

Or, si $\mu_1(\sigma)$ et $\mu_2(\sigma)$ sont les parties positive et négative de $\mu(\sigma)$, on a évidemment pour chaque portion (σ_0) découpée par une sphère du rayon r_0.

$$\mu_1(\sigma_0)\sigma_0 - \mu_2(\sigma_0)\sigma_0 = u_1(\omega_0)\omega_0 - u_2(\omega_0)\omega_0.$$

La fonction $\mu(\sigma)$ étant la différence entre deux fonctions positives

$$\frac{u_1(\omega_0)\omega_0}{\sigma_0} \text{ et } \frac{u_2(\omega_0)\omega_0}{\sigma_0},$$

on a

$$\mu_1(\sigma_0) < \frac{u_1(\omega_0)\omega_0}{\sigma_0} < \frac{B_1}{r_0^{2-\lambda}} \frac{4\pi}{3} \frac{r_0^3}{ar_0^2} = \frac{4\pi B_1}{3a} \cdot \frac{1}{r_0^{1-\lambda}}, \quad \mu_1(\sigma_0) r_0^{1-\lambda} < B'.$$

On démontre de même, que

$$\mu_2(\sigma_0) r_0^{1-\lambda} < B'$$

d'où suit l'inégalité (15).

5. Nous dirons qu'une fonction V est harmonique dans un domaine (D), si dans chaque point de (D) elle possède les dérivées secondes qui vérifient l'équation de Laplace, et si ses dérivées premières sont régulièrement continues dans l'intérieur de (D).

Si la fonction V est harmonique dans chaque domaine (D') contenu dans l'intérieur du domaine (D), nous dirons que V est harmonique dans l'intérieur de (D).

Supposons qu'il soit donnée une fonction V_1 harmonique dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ ou dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

Envisageons une portion de surface (σ') placée toute entière dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, respectivement, dans l'intérieur de $(D^{(e)})$ et nommons l'expression

$$\sigma'(V) = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{dV}{dn} d\sigma$$

le flux moyen de V par (σ').

Si (σ') se déplace convenablement, en se déformant éventuellement, et tend à se confondre avec une portion (σ_0) de (S), le flux moyen $\sigma'(V)$ peut avoir une limite déterminée.

En supposant, que la direction de la normale à (σ') est telle qu'en limite elle se confond avec la direction de la normale à (σ_0), nous désignerons cette limite, si elle existe, par $\sigma_0^{(i)}(V)$, si (σ') appartient à $(D^{(i)})$, et par $\sigma_0^{(e)}(V)$, si (σ') appartient à $(D^{(e)})$.

Théorème. Soit donné un potentiel de simple couche

$$V = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} \tag{11}$$

dans lequel la densité moyenne $\mu(\sigma)$ est une fonction additive et à variation bornée.

Soit donné une portion (σ_0) de (S). Si l'on a

$$\underline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \quad \overline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \tag{17}$$

le flux moyen de V a une limite déterminée, quand (σ') tend vers (σ_0) et on a

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(i)}(V) &= \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1) d\sigma_1 + 2\pi \mu(\sigma_0), \\ \sigma_0^{(e)}(V) &= \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1) d\sigma_1 - 2\pi \mu(\sigma_0) \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$k(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma, \tag{19}$$

N_0 étant la normale à (S) au point (x) sur (S).

Nous désignons ici suivant les conventions du chapitre 1 par $\underline{M}(\sigma_0)$, respectivement par $\overline{M}(\sigma_0)$, les limites des variables $M(\underline{\sigma})$, resp. $M(\bar{\sigma})$, dans lesquelles $(\underline{\sigma})$, resp. $(\bar{\sigma})$, est un domaine contenu dans l'intérieur de (σ) resp. un domaine, contenant (σ) dans son intérieur, quand $(\underline{\sigma})$, resp. $(\bar{\sigma})$, tendent à se confondre avec (σ).

Remarquons en premier lieu que les conditions (17) sont satisfaites, si la fonction $\mu(\sigma)$ est continue dans un domaine pour lequel les points sur la frontière de (σ_0) sont les points intérieurs. En effet, dans ce domaine la variation moyenne $M(\sigma)$ de $\mu(\sigma)$ est aussi continue suivant les théorèmes du § 5 (1).

En second lieu remarquons, que suivant l'assertion (a) du § 2 la fonction $k(\sigma, 1)$ est une fonction continue dans chaque point (x_1) sur (S), car $k(\sigma, 1)$ est égale à un potentiel de double couche, dont la densité est

égale à — 1, quand le point (x) est sur (σ), et est égale à zéro, quand le point (x) est en dehors de (σ); dans le potentiel de double couche, effectivement, l'angle entre la normale N_0 et la distance r_{10} est égal à $(r_{0,1}\, N_0)$.

Nous avons montré à titre d'exemple dans le § 4 (1), que si (S) est une surface de Liapounoff, la fonction $k(\sigma, 1)$ est additive et à variation bornée pour chaque (x_1) et que sa variation moyenne est égale à

$$K(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma,$$

ses parties positive et négative étant égales à

$$\frac{1}{2}\{K(\sigma, 1) + k(\sigma, 1)\}, \quad \frac{1}{2}\{K(\sigma, 1) - k(\sigma, 1)\}.$$

La fonction $K(\sigma, 1)$ est continue sur (S_1) comme fonction de (x_1). En effet, soient donnés deux points (x_1) et (x_1') à la distance h. Soit δ plus grand que h. Les intégrales

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma, \quad \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10}' N_0)|}{r_{10}'^2}\, d\sigma,$$

où (δ) est la portion de (S), découpée par une sphère du rayon δ ayant son centre en (x_0), et r_{10}' la distance entre les points (x_1') et (x), sont respectivement plus petites que

$$\frac{2 \cdot 2\pi\, \delta^\lambda}{\sigma\lambda} \text{ et } \frac{2 \cdot 2\pi\, (\delta + h)^\lambda}{\sigma\lambda} < \frac{2 \cdot 2\pi \cdot (2\delta)^\lambda}{\sigma\lambda},$$

comme on s'assure aisément en construisant la portion découpée de (S_1) par une sphère du rayon $(\delta + h)$ ayant son centre en (x_1').

Or on a

$$\left|\frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10}' N_0)|}{r_{10}'^2}\, d\sigma - \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma\right| < \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|\, d\sigma}{r_{10}^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10}' N_0)|\, d\sigma}{r_{10}'^2} + \frac{1}{\sigma} \left| \int\limits_{(\sigma-\delta)} \left\{ \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} - \frac{|\cos(r_{10}' N_0)|}{r_{10}'^2} \right\} d\sigma. \right|$$

On peut choisir δ assez petit pour que chacune des deux premières intégrales dans la partie droite soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$; ayant choisi δ, on peut choisir h assez petit, pour que la dernière intégrale devienne plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$.

La fonction $K(\sigma, 1)$ étant pour chaque (σ) la fonction continue de (x_1), la variation totale de $k(\sigma, 1)$ est bornée comme fonction de (x_1); la fonction $k(\sigma, 1)$ répond donc aux conditions du théorème du § 9 (2); nous sommes convenus de dire que le noyau $k(\sigma, 1)$ répond dans ce cas à la condition (A).

La fonction $k(\sigma, 1)$, étant la moyenne d'une fonction intégrable, est absolument continue pour chaque position du point (x_1); on a donc, pour chaque position du point (x_1)

$$K(\sigma, 1)\,\sigma < \varepsilon,$$

si

$$\sigma < \eta,$$

le nombre η étant convenablement choisi.

Le choix de η est, cependant, indépendant de la position du point (x_1).

En construisant une sphère ayant le point (x_1) pour centre et le rayon δ suffisamment petit, nous avons

$$\int_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10}(N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$$

en désignant par (δ) la péortion découpée par cette sphère.

Étant donné, maintenant, un domaine (σ), désignons par $(\sigma\,\delta)$ la portion commune à (σ) et à (δ).

Nous avons:

$$\int_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10}\,N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma = \int_{(\sigma\delta)} \frac{|\cos(r_{10}\,N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma + \int_{(\sigma-\sigma\delta)} \frac{|\cos(r_{10}\,N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{(\sigma - \sigma\delta)}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{\delta^2}.$$

Donc, si

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \delta^2 = r_1,$$

l'inégalité

$$K(\sigma, 1)\, \sigma = \int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|\, d\sigma}{r_{10}^2} < \varepsilon$$

subsiste indépendamment de la position du point (x_1).

Passons maintenant à la démonstration du théorème. En utilisant le théorème du § 8 (2) nous pouvons écrire

$$(20) \qquad \sigma'(V) = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \left(\int\limits_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1) \cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \left(\frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma \right) d\sigma_1,$$

la fonction

$$(21) \qquad \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}$$

étant bornée et continue comme fonction de (x_1), si ce point est situé sur (S).

Désignons par $(S^{(0)})$ le domaine, obtenu de (S) en retranchant le domaine (σ_0). En se servant des égalités (17) on peut construire deux domaines $(\theta^{(0)})$ et (θ_0) contenus respectivement dans $(S^{(0)})$ et dans (σ_0) et ayant la frontière de (σ_0) pour leur frontière commune, tels qu'on ait:

$$M(\theta^{(0)})\, \theta^{(0)} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad M(\theta_0)\, \theta_0 < \frac{\varepsilon}{4},$$

Si (θ) est le domaine formé par la réunion de $(\theta^{(0)})$ et (θ_0), on a

$$M(\theta)\, \theta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous n'avons pas fait jusqu'à présent aucune supposition sur le déplacement de (σ'). Supposons que la courbe, qui limite (σ'), décrit quand (σ') se déplace, en étant suffisamment près de (σ_0), une portion de surface (δ) qui possède dans chaque point un plan tangent déterminé.

Supposons, pour fixer les idées, que (σ') est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$.

Si le point (x_1) sur (S) n'appartient pas à (θ), l'intégrale de Gauss

$$(22) \qquad -\left(\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma - \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma + \int\limits_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma\right)$$

est égale à zéro, quand le point (x_1) est sur $(S^{(0)})$, et est égale à 2π, quand le point (x_1) appartient à (σ_0); nous mettons le signe (—) devant le second terme dans (22), car la normale dans l'intégrale de Gauss doit être dirigée dans la portion de l'espace, qui est extérieur au domaine, limité par (σ_0), (σ') et (δ), tandis que dans cette intégrale il faut diriger la normale, suivant la convention faite ci-dessus, vers l'intérieur du domaine.

Or, il est facile de démontrer que l'intégrale

$$(23) \qquad \int\limits_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma$$

est infiniment petite, quand le point (x_1) est en dehors de (θ). Les valeurs de r_{10}, étant dans ce cas supérieures à un nombre η, l'intégrale considérée est plus petite que

$$\frac{\delta}{\eta^2},$$

δ étant la mesure de (δ), d'où il suit que, si (σ') est assez près de sa limite, l'intégrale (23) est moindre que ε.

Si le point (x_1) est dans (θ), les intégrales

$$\left|\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma\right|, \quad \left|\int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma\right|$$

sont bornées, en prenant les valeurs comprises entre 0 et 4π.

Étudions maintenant la différence

$$(24) \qquad \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{dV}{dn} d\sigma' - \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1) d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \left(\frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma - \frac{1}{\sigma_0} \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma\right) d\sigma_1.$$

On peut lui donner la forme

$$(25)\qquad \frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{(S_1^{(1)})}\mu(\sigma_1)\left\{\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma-\int\limits_{(\sigma_0)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right\}d\sigma_1+$$

$$+\frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{(\sigma_0')}\mu(\sigma_1)\left\{\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma-\int\limits_{(\sigma_0)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right\}d\sigma_1+$$

$$+\left(\frac{1}{\sigma'}-\frac{1}{\sigma_0}\right)\int\limits_{(S_1)}\mu(\sigma_1)\left(\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right)d\sigma_1+$$

$$+\frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{(\theta)}\mu(\sigma_1)\left(\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right)d\sigma_1-\frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{(\theta)}\mu(\sigma_1)\left(\int\limits_{(\sigma_0)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right)d\sigma_1,$$

où $(S_1^{(1)})$ et (σ'_0) sont les portions de $(S^{(0)})$ et (σ_0) en dehors de (θ).

Chacun des deux derniers termes dans (25) est plus petit que

$$(26')\qquad \frac{1}{\sigma_0}\,4\pi M(\theta)\,\theta<\frac{2\pi\varepsilon}{\sigma_0}\,.$$

Si nous supposons que (σ') est assez près de (σ_0) pour que la différence

$$\left|\frac{\sigma_0}{\sigma'}-1\right|$$

soit plus petite en valeur absolue que ε, le troisième terme dans (25) sera plus petit, que

$$(26'')\qquad \frac{\varepsilon\,4\pi}{\sigma_0}\int\limits_{(S_1)}M(\sigma_1)\,d\sigma_1=\frac{4\pi\,M(S)\,S}{\sigma_0}\,\varepsilon.$$

Le second terme dans (25) diffère de

$$(27)\qquad \frac{2\pi}{\sigma_0}\int\limits_{(\sigma_0')}\mu(\sigma_1)\,d\sigma_1=\frac{2\pi}{\sigma_0}\,\mu(\sigma_0')\,\sigma_0'$$

par la quantité

$$-\frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{(\sigma_0')}\mu(\sigma_1)\left(\int\limits_{(\delta)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right)d\sigma_1$$

qui est en valeur absolue moindre que

$$(26''') \qquad \frac{1}{\sigma_0}\frac{\delta}{\eta^2} M(\sigma_0') \sigma_0' < \frac{M(\sigma_0)\sigma_0}{\sigma_0}\frac{\delta}{\eta^2} < \frac{M(\sigma_0)\sigma_0}{\sigma_0}\varepsilon.$$

Or, la limite de $\mu(\sigma_0')\,\sigma_0'$ pour $(\sigma_0') \to (\sigma_0)$ est égale à $\mu(\sigma_0)\,\sigma_0$, car $\mu(\sigma_0 - \sigma_0')\,(\sigma_0 - \sigma_0')$ est plus petite en valeur absolue que

$$M(\sigma_0 - \sigma_0')(\sigma_0 - \sigma_0') = M(\theta_0)\,\theta_0.$$

Il suit de là que la quantité (27) diffère de

$$(28) \qquad 2\pi\,\mu(\sigma_0)$$

moins que

$$(26^{\mathrm{IV}}) \qquad \frac{2\pi}{\sigma_0}\cdot\frac{\varepsilon}{4}.$$

Le premier terme dans (25) est plus petit en valeur absolue que

$$\frac{1}{\sigma_0}\int_{(S^{(1)})} M(\sigma_1)\left(\int_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right) d\sigma_1$$

et, par conséquent, est plus petit que

$$(26^{\mathrm{V}}) \qquad \frac{\delta}{\eta^2}\frac{1}{\sigma_0}\int_{(S_1^{(1)})} M(\sigma_1)\,d\sigma_1 < \frac{\delta}{\eta^2}\frac{1}{\sigma_0} M(S^{(0)})\,S^{(0)} < \frac{\varepsilon}{\sigma_0} M(S^{(0)})\,S^{(0)}.$$

En recueillant toutes les inégalités obtenues, nous concluons que (24) diffère de (28) en valeur absolue moins que

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_0} M(S)\,S + \frac{2\pi}{\sigma_0}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{4\pi\,M(S)\,S}{\sigma_0}\,\varepsilon + \frac{4\pi}{\sigma_0}\,\varepsilon,$$

d'où il suit que les égalités (18) sont exactes.

6. Quand la fonction moyenne $\mu(\sigma)$ répond à la condition mentionnée dans le § 4: pour chaque sphère du rayon r_0 ayant son centre sur (S) on a

$$(15) \qquad M(\sigma_0)\,r_0^{1-\lambda} < B,$$

(σ_0) étant la portion découpée par cette sphère, on peut donner au théorème une forme plus précise.

Désignons par (L) la frontière du domaine (σ_0). Supposons que la courbe (L) est rectifiable. Prenons un point sur (L) et construisons une sphère du rayon r_0, ayant ce point pour centre. La longueur de la courbe dans l'intérieur de la sphère surpasse $2r_0$, car r_0 est la distance entre le centre de la sphère et les points, où (L) sort de la sphère. En construisant une seconde sphère autour du point, dans lequel (L) sort de la première sphère, une troisième sphère autour du point, où (L) sort de la seconde sphère et ainsi de suite, nous couvrons (L) par un certain nombre des sphères du rayon r_0; ce nombre ne surpasse pas

$$\frac{L}{r_0},$$

L étant la longueur de (L).

Nous avons démontré dans le § 4 que la surface de la portion (σ_0'), écoupée de (S) par une sphère du rayon r_0 ayant son centre sur (S), ne surpasse pas $2\pi r_0^2$.

Si l'inégalité (15) est satisfaite, on a pour chaque portion (σ_0')

$$M(\sigma_0')\,\sigma_0' < 2\pi r_0^2 B r_0^{\lambda-1} = 2\pi B r_0^{1+\lambda},$$

d'où il suit que si l'on prend pour (θ) le domaine, couvert par les sphères, qui couvrent (L), on aura

$$|M(\theta)|\,\theta < \frac{2\pi B r_0^{1+\lambda} L}{r_0} = 2\pi B L r_0^{\lambda}.$$

Comme le dernier nombre tend vers zéro avec r_0, on peut faire $M(\theta)\,\theta$ moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ en choisissant convenablement r_0.

Donc, si la condition (15) est satisfaite, les égalités (17) ont lieu pour chaque domaine (σ_0) limité par une courbe rectifiable.

Nous nous contentons ici de cette remarque.

7. Étudions maintenant, pour l'éclaircir, le cas, quand la fonction moyenne $\mu(\sigma)$ ne satisfait pas aux égalités (17).

Soit (L) la frontière de (σ_0) et $(S^{(0)})$ le domaine $(S - \sigma_0)$, qu'on obtient en retranchant de (S) le domaine (σ_0). Supposons que la courbe (L) est rectifiable. Soit (l) une portion de (L); désignons par $(\sigma^{(0)})$ un domaine, appartenant à $(S^{(0)})$ et ayant avec (L) des points communs, qui forment la

portion (l); désignons par $(\sigma^{(i)})$ un domaine, appartenant à (σ_0) et ayant avec (L) des points communs qui forment la portion (l).

Nous supposerons, en premier lieu, que les deux conditions suivantes sont satisfaites: pour chaque (l) les variables $M(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$, $M(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)}$ ont les limites bien déterminées, quand $(\sigma^{(e)})$, respectivement, $(\sigma^{(i)})$ tendent vers zéro.

Les conditions mentionnées ne sont pas toujours satisfaites. Par exemple, supposons que, étant donnée un point (x_2) sur (S), on a: $\mu(\sigma)=0$, si (x_2) n'appartient pas à (σ); $\mu(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$, si (x_2) est un point intérieur de (σ) et $\mu(\sigma)=\frac{1}{\sigma}\,\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2\pi}$, si (x_2) est sur la frontière de (σ), α_1, α_2 étant les angles formés d'après la règle qui suit: construisons une sphère du rayon r, ayant le point (x_2) pour centre et envisageons les angles α_1', α_2' entre les rayons menés du point (x_2) aux points d'intersection de (L) avec cette sphère, les plus proches à (x_2), et un rayon déterminé, comptés dans une direction fixe; nous désignons par α_1 et α_2 les limites de α_1', α_2' pour $r\to 0$ (ou les limites inférieures, si ces limites n'existent pas).

Si (x_2) est l'extrémité de (l), la limite de $\mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$ dépend de la limite de $\alpha_2-\alpha_1$.

Remarquons, que dans le cas considéré:

$$V=\int\limits_{(S_1)}\mu(\sigma_1)\,\frac{d\sigma_1}{r_{10}}=\frac{1}{r_{20}},$$

r_{20} étant la distance entre les points (x) et (x_2).

Sous les deux conditions posées les variables $\mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$, $\mu(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)}$ ont les limites bien déterminées.

Supposons que $(\sigma_n^{(e)})$, $(\sigma_m^{(e)})$ sont deux domaines de la forme $(\sigma^{(e)})$.

Soit (g) leur portion commune, (c_n) la portion de $(\sigma_n^{(e)})$, qui n'appartient pas à $(\sigma_m^{(e)})$ et (c_m) la portion de $(\sigma_m^{(e)})$, qui n'appartient pas à $(\sigma_n^{(e)})$. On a evidemment

$$\begin{aligned}|\mu(\sigma_n^{(e)})\,\sigma_n^{(e)}-\mu(\sigma_m^{(e)})\,\sigma_m^{(e)}| &= |\mu(c_n)\,c_n-\mu(c_m)\,c_m| < |\mu(c_n)|\,c_n+\\ &+|\mu(c_m)|\,c_m < M(c_n)\,c_n+M(c_m)\,c_m=\\ &=M(\sigma_n^{(e)})\,\sigma_n^{(e)}+M(\sigma_m^{(e)})\,\sigma_m^{(e)}-2M(g)g.\end{aligned}$$

Or, suivant la convention:

$$M(\sigma_n^{(e)})\,\sigma_n^{(e)},\quad M(\sigma_m^{(e)})\,\sigma_m^{(e)},\quad M(g)g$$

ont les mêmes limites. Il suit de la, que $\mu(\sigma_n^{(e)})\,\sigma_n^{(e)} - \mu(\sigma_m^{(e)})\,\sigma_m^{(e)}$ est infiniment petite, d'où on conclut en premier lieu, que $\mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$ a une limite et, en second lieu, que cette limite est indépendante de la loi de variation de $\sigma^{(e)}$.

Nous désignerons les limites de $\mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$ et de $\mu(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)}$ par $\nu^{(e)}(l)\,l$ et $\nu^{(i)}(l)\,l$, ces limites dépendant seulement de (l).

Il suit de là, $\mu_1(\sigma)$, $\mu_2(\sigma)$ étant les portions positive et négative de $\mu(\sigma)$, que les quantités $\mu_1(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}\ldots,\ \mu_2(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)}$ possèdent aussi les limites bien déterminées; ces limites étant $\nu_1^{(e)}(l)\,l,\ldots,\ \nu_2^{(i)}(l)\,l$, on a évidemment

$$\nu^{(e)}(l) = \nu_1^{(e)}(l) - \nu_2^{(e)}(l),\quad \nu^{(i)}(l) = \nu_1^{(i)}(l) - \nu_2^{(i)}(l);$$

on a, par exemple,

$$\nu_1^{(e)}(l)\,l = \lim \mu_1(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} = \lim \frac{1}{2}\left(M(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} + \mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}\right).$$

Ayant en vue les remarques faites ci-dessus, nous pouvons, pour simplifier les raisonnements, supposer que les valeurs de $\mu(\sigma)$ ne sont pas négatives.

Introduisons une fonction moyenne $\theta(\sigma)$ d'après les conventions suivantes: supposons que:

1) $\theta(\sigma) = 0$, si (σ) est un domaine, qui ne contient pas les points appartenant à (L) et formant un domaine (à une dimension).

2) $\theta(\sigma) = \dfrac{\nu^{(e)}(l)\,l}{\sigma}$, si tous les points intérieurs de (σ) appartiennent à $(S^{(0)})$ et si (l) est la portion de (L) appartenante à (σ).

3) $\theta(\sigma) = \dfrac{\nu^{(i)}(l)\,l}{\sigma}$, si tous les points intérieurs de (σ) appartiennent à (σ_0) et si (l) est la portion de (L) appartenante à (σ).

4) $\theta(\sigma)$ est une fonction moyenne additive; il suit de là, que si le domaine (σ) contient les points intérieurs, qui appartiennent à (S^0) et les points intérieurs, qui appartiennent à (σ_0), on a

$$\theta(\sigma) = \frac{(\nu^{(e)}(l) + \nu^{(i)}(l))\,l}{\sigma}$$

Envisageons maintenant la fonction

$$\vartheta(\sigma) = \mu(\sigma) - \theta(\sigma).$$

On a

$$\vartheta(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} = \mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} - \theta(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} = \mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} - \nu^{(e)}(l)\,l,$$

$$\lim \vartheta(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)} = 0, \quad (\sigma^{(e)}) \to 0$$

$$\vartheta(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)} = \mu(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)} - \theta(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)} = \mu(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)} - \nu^{(i)}(l)\,l,$$

$$\lim \vartheta(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)} = 0; \quad (\sigma^{(i)}) \to 0.$$

On s'assure sans peine, que les valeurs de $\vartheta(\sigma)$ ne sont pas négatives. En effet, en partant d'un domaine donné $(\sigma^{(e)})$ ou $(\sigma^{(i)})$ on peut toujours le changer en le réduisant à zéro de manière, que chaque domaine suivant soit contenu dans le précédant; les valeurs de $\mu(\sigma)$ étant positives, il suit de là que $\mu(\sigma^{(e)})\,\sigma^{(e)}$, ainsi que $\mu(\sigma^{(i)})\,\sigma^{(i)}$ se diminuent en tendent vers leurs limites La fonction $\vartheta(\sigma)$ étant additive et ayant ses valeurs positives est à variation bornée.

Ainsi on voit que $(\theta^{(0)})$ et (θ_0) étant les domaines, qui ont été introduits dans le § 5,

$$\lim \vartheta(\theta^{(0)})\,\theta^{(0)} = 0, \quad \lim \vartheta(\theta_0)\,\theta_0 = 0;$$

$\vartheta(\sigma)$ satisfait aux conditions (17) et le théorème du § 5 subsiste pour la fonction

$$V_1 = \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\,\frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Or on a

$$\mu(\sigma) = \vartheta(\sigma) + \theta(\sigma)$$

et on s'assure sans peine, que

$$\int_{(S_1)} \theta(\sigma_1)\,\frac{d\sigma_1}{r_{10}} = \int_{(L_1)} [\nu^{(e)}(l_1) + \nu^{(i)}(l_1)]\,\frac{dl_1}{r_{10}},$$

la partie droite de l'égalité étant l'intégrale de Stieltjes, étendue sur la frontière (L) de (σ_0).

On a dans le cas considéré

$$(30)\qquad V=\int_{(S_1)}\mu(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}=\int_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}+\int_{(L_1)}[\nu^{(e)}(l_1)+\nu^{(i)}(l_1)]\frac{dl_1}{r_{10}}$$

et le théorème du § 5 est applicable au premier terme de V.

Remarquons encore qu'on a

$$\underline{\mu}(\sigma_0)=\vartheta(\sigma_0),\quad \overline{\mu}(\sigma_0)=\vartheta(\sigma_0)+\frac{(\nu^{(e)}(L)+\nu^{(i)}(L))\,L}{\sigma_0}.$$

On a, en effet,

$$\mu(\underline{\sigma})\,\underline{\sigma}=\vartheta(\underline{\sigma})\,\underline{\sigma}+\theta(\underline{\sigma})\,\underline{\sigma},\quad \theta(\underline{\sigma})=0$$

$$\mu(\overline{\sigma})\,\overline{\sigma}=\vartheta(\overline{\sigma})\,\overline{\sigma}+\theta(\overline{\sigma})\,\overline{\sigma},\quad \theta(\overline{\sigma})\,\overline{\sigma}=\left((\nu^{(e)}(L)+\nu^{(i)}(L)\right)L.$$

Remarque. Nous avons supposé que la courbe (L) est rectifiable. Dans le cas contraire, on ne peut pas parler d'une fonction moyenne des arcs de la courbe.

8. Supposons que les valeurs de $\mu(\sigma)$ ne sont pas négatives. Prenons sur (S) un point $(x^{(0)})$ et l'entourons par une sphère, ayant le centre en $(x^{(0)})$ et le rayon égal à r; convenons de désigner par $[r]$ la portion de (σ) découpée par cette sphère.

Si la limite de la variable $\mu([r])\,[r]$ est différente de zéro quand r tend vers zéro, le point $(x^{(0)})$ est dit le point singulier.

Lemme. Les points singuliers, situés sur (S) sont en nombre fini ou forment un ensemble dénombrable.

Envisageons les points singuliers, pour lesquelles la limite de $\mu([r])\,[r]$ dépasse un nombre a. Si le rayon r est plus petit qu'un nombre r_0, $\mu([r])\,[r]$ est plus grand que $\frac{a}{2}$.

On peut donc entourer ces points singuliers par les sphères, n'ayant pas des points communs et telles que pour chacune d'elles $\mu([r])\,[r]$ est plus grand que $\frac{a}{2}$.

Si N est le nombre des dits points singuliers, on a

$$\Sigma\mu([r])\,[r]>\frac{Na}{2}$$

et comme la fonction $\mu(\sigma)$ est à variation bornée, $N\frac{a}{2}$ ne surpasse pas B, B étant la variation totale de $\mu(\sigma)$ sur (S).

En prenant pour a successivement les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, nous pouvons donc énumérer pas à pas tous les points singuliers, situés sur (S).

Si $(x^{(n)})$ est le point singulier portant le numéro n et si

$$m_n = \lim \mu([r_n])[r_n], \quad r_n \to 0,$$

où r_n est le rayon de la sphère ayant le centre au point $(x^{(n)})$, la série

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n + \cdots$$

est convergente, car la somme de ses n premiers termes, qui sont tous positifs, ne surpasse pas la borne totale de $\mu(\sigma)$.

Nous dirons, que m_n est la masse du point singulier $(x^{(n)})$.

Remarquons, que si l'on a pour chaque portion $[r]$ l'inégalité

$$M([r])\, r^{2-\lambda} < B,$$

il n'existe pas des points singuliers. En effet, nous avons vu dans le § 4, qu'on a

$$[r] = ar^2;$$

il suit de là, que sous la supposition faite ci-dessus

$$M([r])[r] < \frac{Bar^2}{r^{2-\lambda}} = Bar^{\lambda};$$

$M([r])[r]$ est donc infiniment petite avec r.

Soit $(x^{(0)})$ un point singulier. Désignons par m_0 sa masse.

Introduisons une nouvelle fonction moyenne $\tilde{\mu}(\sigma)$ suivant la règle: posons $\tilde{\mu}(\sigma) = \mu(\sigma)$, si le point $(x^{(0)})$ n'appartient pas à (σ) et, dans le cas contraire, en désignant par (σ_r) la portion commune à (σ) et à $[r]$,

$$\tilde{\mu}(\sigma) = \lim \mu(\sigma - \sigma_r), \quad r \to 0$$

cette limite existant toujours, car $\mu(\sigma - \sigma_r)(\sigma - \sigma_r)$ augmente, quand r diminue, les valeurs de $\mu(\sigma)$ étant positives.

La fonction $\bar{\mu}(\sigma)$ est additive. Si (σ) est décomposé en deux portions $(\sigma^{(1)})$ et $(\sigma^{(2)})$, on a

$$\mu(\sigma^{(1)}-\sigma_r^{(1)})(\sigma^{(1)}-\sigma_r^{(1)})+\mu(\sigma^{(2)}-\sigma_r^{(2)})(\sigma^{(2)}-\sigma_r^{(2)})=\mu(\sigma-\sigma_r)(\sigma-\sigma_r)$$

d'où suit

$$\bar{\mu}(\sigma^1)\sigma^1+\bar{\mu}(\sigma^{(2)})\sigma^{(2)}=\bar{\mu}(\sigma)\sigma.$$

Enfin, pour la fonction $\bar{\mu}(\sigma)$ le point $(x^{(0)})$ n'est pas un point singulier. Si l'on pose

$$\mu([r])[r]=f(r)$$

on a

$$\bar{\mu}([r])[r]=f(r)-f(+0).$$

car

$$\bar{\mu}([r])[r]=\lim\mu([r]-[r_1])([r]-[r_1])=$$
$$=\mu([r])[r]-\lim\mu([r_1])[r_1],\quad r_1\to 0.$$

Il suit de là, que

$$\lim\bar{\mu}([r])[r]=0,\quad r\to 0.$$

Posons

$$\varkappa(\sigma)=\mu(\sigma)-\bar{\mu}(\sigma),$$

la fonction $\varkappa(\sigma)$ étant additive et ayant toutes ses valeurs non négatives.

Comme on a

$$\varkappa(\sigma)=0,$$

quand (σ) ne contient pas le point $(x^{(0)})$, et $\varkappa(\sigma)\sigma=m=\lim\mu([r])[r]$ dans le cas contraire, on trouve sans peine

$$V=\int_{(S_1)}\frac{\mu(\sigma_1)\,d\sigma_1}{r_{10}}=\int_{(S_1)}\frac{\bar{\mu}(\sigma_1)\,d\sigma_1}{r_{10}}+\frac{m}{r_0^{(0)}}$$

$r_0^{(0)}$ étant la distance entre le point (x) et le point $(x^{(0)})$.

9. *Théorème.* Soit (l) une portion de (L). Si les extrémités de (l) ne sont pas les points singuliers, les limites des variables $\mu(\sigma^{(e)})\sigma^{(e)}$, $\mu(\sigma^{(i)})\sigma^{(i)}$, qui ont été introduites dans le § 7, sont bien déterminées.

Démontrons le théorème pour la variable $\mu(\sigma^{(e)})\sigma^{(e)}$.

Soit $(\sigma_{1,n}^{(e)})$ le domaine qui varie suivant une loi déterminée; désignons par $\nu^{(e)}(l)l$ la limite de $\mu(\sigma_{1,n}^{(e)})\,\sigma_{1,n}^{(e)}$.

Soit $(\sigma_n^{(e)})$ le domaine qui varie suivant une autre loi.

Si n_0 est assez grand, on a

$$\mu\left(\sigma_{1,n_1}^{(e)}\right)\sigma_{1,n_1}^{(e)} - \nu^{(e)}(l)\,l < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour } n_1 \geqq n_0.$$

Entourons les extrémités de (l) par les sphères à rayon r, ayant ces extrémités pour centres et choisissons r de manière qu'on ait pour chacune d'elles

$$\mu([r])\,[r] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si n est assez grand, les portions de $(\sigma_n^{(e)})$, qui n'appartiennent pas à $(\sigma_{1,n_1}^{(e)})$ sont dans l'intérieur des portions de (S) découpées par les sphères mentionnées. Comme $\mu(\sigma)\sigma$, calculée pour le domaine (σ) contenu dans $(\sigma_{1,n_1}^{(e)})$ est plus petite que $\mu(\sigma_{1,n_1}^{(e)})\,\sigma_{1,n_1}^{(e)}$ il suit de là, que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \mu\left(\sigma_{1,n_1}^{(e)}\right)\sigma_{1,n_1}^{(e)} - \mu\left(\sigma_n^{(e)}\right)\sigma_n^{(e)}.$$

Or, si n_2 est assez grand, tous les points de $(\sigma_{1,n_2}^{(e)})$, excepté les points appartenants à deux sphères mentionnées, appartiennent à $(\sigma_n^{(e)})$. On a donc

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \mu\left(\sigma_n^{(e)}\right)\sigma_n^{(e)} - \mu\left(\sigma_{1,n_2}^{(e)}\right)\sigma_{1,n_2}^{(e)}.$$

Il suit de là, que

$$\nu^{(e)}(l)\,l - \frac{\varepsilon}{2} < \mu\left(\sigma_{1,n_2}^{(e)}\right)\sigma_{1,n_2}^{(e)} - \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \mu\left(\sigma_n^{(e)}\right)\sigma_n < \mu\left(\sigma_{1,n_1}^{(e)}\right)\sigma_{1,n_1}^{(e)} + \frac{\varepsilon}{2} < \nu^{(e)}(l)\,l + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$\lim \mu(\sigma_n^{(e)})\,\sigma_n^{(e)} = \nu^e(l)\,l$$

ce qu'il était à démontrer.

Comme corollaire nous obtenons: s'il n'y a pas sur (L) des points singuliers, les raisonnements du § 7 sont applicables à (σ_0).

Dans ce cas la fonction moyenne

$$\nu(l) = \nu^{(e)}(l) + \nu^{(i)'}(l)$$

des arcs de la courbe (L) est continue.

Supposons que (l_1) est une portion de (l), qui est contenue toute entière dans l'intérieur de (l) et que $(l_1) \to (l)$. Supposons, que

$$\nu(l)\, l - \lim \nu(l_1)\, l_1 = k > 0.$$

Pour un choix convenable de $(l_1^{(0)})$ on a

$$\nu(l)\, l - \nu(l_1)\, l_1 > \frac{k}{2}.$$

si (l_1) est plus près de (l) que $(l_1^{(0)})$.

Construisons deux sphères, ayant les extrémités de (l) pour centres et passant par les extrémités de (l_1). Si r et r_1 sont les rayons de ces sphères,

$$\mu([r])\,[r] + \mu([r_1])\,[r_1]$$

tend vers zéro, quand (l_1) tend vers (l) et pour un choix convenable de (l_1) on a

$$\mu([r])\,[r] + \mu([r_1])\,[r_1] < \frac{k}{4}.$$

Soit (σ) un domaine contenant (l) dans son intérieur, les extrémités de (l) étant sur la frontière de (σ), et désignons par (σ_r) et (σ_{r_1}) les portions de (σ) contenues dans les sphères mentionnées. Nous avons

$$\lim \mu(\sigma)\,\sigma = \nu(l)\, l, \quad \lim \mu(\sigma - \sigma_r - \sigma_{r_1})\,(\sigma - \sigma_r - \sigma_{r_1}) = \nu(l_1)\, l_1.$$

On a, pour un choix convenable de (σ):

$$0 < \mu(\sigma)\,\sigma - \nu(l)\, l < \frac{k}{4},$$

$$0 < \mu(\sigma - \sigma_r - \sigma_{r_1})\,(\sigma - \sigma_r - \sigma_{r_1}) - \nu(l_1)\, l_1 < \frac{k}{4}$$

d'où suit

$$\nu(l)\, l - \nu(l_1)\, l_1 - \mu([r])\,[r] - \mu([r_1])\,[r_1] < \frac{k}{4}$$

et

$$\nu(l)l - \nu(l_1)l_1 < \frac{k}{2}$$

ce qui est contre l'hypothèse.

En appliquant les considérations ci-dessus aux parties positive $\mu_1(\sigma)$ et négative $\mu_2(\sigma)$ de la fonction moyenne $\mu(\sigma)$, on trouve sans peine

$$(30') \qquad V = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} = \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{r_0^{(k)}} + \int_{(L)} \nu(l)\frac{dl}{r_{10}},$$

où m_k est égale à la différence des masses du point singulier $(x^{(k)})$ pour les fonctions $\mu_1(\sigma)$ et $\mu_2(\sigma)$ — à la masse du point $(x^{(k)})$ pour la fonction $\mu(\sigma)$, — et $\vartheta(\sigma)$ est égale à la différence des fonctions $\vartheta_1(\sigma)$, et $\vartheta_2(\sigma)$, qu'on obtient à l'aide des fonctions $\bar{\mu}_1(\sigma)$ et $\bar{\mu}_2(\sigma)$ après la transformation du § 7; $\nu(l)l$ est égale à la différence entre $\bar{\mu}(\sigma)$ et $\vartheta(\sigma)$. Au premier terme de la somme (30′) est applicable le théorème du § 5; la fonction moyenne $\nu(l)$ des arcs sur (L) est continue (on suppose que la courbe (L) est rectifiable).

Remarque. Il est possible que la fonction $\mu(\sigma)$ n'est pas continue dans le voisinage de (σ_0), tandis que le dernier terme dans (30′) est absent, les valeurs de $\nu(l)$ étant égales à zéro.

Pour donner un exemple, posons que la fonction $\mu_1(\sigma)$ est continue et formons une fonction moyenne $k(\sigma)$ d'après les règles suivantes.

Supposons, que la courbe (L), qui limite (σ_0), est rectifiable.

1) $k(\sigma) = 0$, si (σ) n'a pas des points communs avec (L) ou si les points communs à (L) et à (σ) ne forment pas un domaine (à une dimension).

2) $k(\sigma) = \frac{l}{\sigma}$, si tous les points intérieurs de (σ) appartiennent à (σ_0) et si les points communs à (L) et à (σ) forment le domaine (l) à mesure l.

3) $k(\sigma) = -\frac{l}{\sigma}$, si tous les points intérieurs de (σ) appartiennent á $S(^0)$ et si les points communs à (L) et à (σ) forment le domaine (l) à mesure l.

4) la fonction $k(\sigma)$ est additive.

La fonction $k(\sigma)$ est à variation bornée, sa variation totale étant égale à $2L$. La fonction $\mu(\sigma) = \mu_1(\sigma) + k(\sigma)$ n'est pas continue, car on a

$$M(\sigma_0)\sigma_0 - \underline{M}(\sigma_0)\sigma_0 = k(\sigma_0)\sigma_0 - \underline{k}(\sigma_0)\sigma_0 = L;$$

la correspondante fonction $\nu(l)$, qui est attachée au domaine (σ_0), est cependant égale à zéro.

On s'assure sans peine, que les intégrales

$$\int_{(\Sigma)} \mu(\sigma)\varphi(x)\,d\sigma, \quad \int_{(\Sigma)} \mu_1(\sigma)\varphi(x)\,d\sigma$$

sont distinctes seulement dans le cas, quand la frontière de (Σ) a un domaine commun avec (L); ces intégrales, étendues sur (S), sont à cause de cela égales et en évaluant, par exemple, V, on peut remplacer la fonction $\mu(\sigma)$ par la fonction $\mu_1(\sigma)$.

10. En retournant aux notations du § 5, supposons que la portion de la surface (δ) qui y est introduite, répond aux conditions de Liapounoff.

On s'assure aisément que dans ce cas l'intégrale

$$\int_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma \tag{23}$$

tend, comme fonction de (x_1), uniformément vers zéro, si le point (x_1) est situé sur (L).

En effet, entourons le point (x_1) par une sphère du rayon η assez petit pour que cette sphère soit dans l'intérieur de la sphère de Liapounoff attachée au point (x_1).

Si $[\eta]$ est la portion de (δ) découpée par cette sphère, on trouve, en répétant les raisonnements maintes fois employés, que

$$\left|\int_{[\eta]} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right| < 2\,.\,2\pi \int_0^{\eta} \frac{d\rho}{\rho^{1-\lambda}} = \frac{4\pi}{\lambda}\,\eta^{\lambda}.$$

Dans la portion de (δ) en dehors de $[\eta]$ on a $r_{10} > \eta$; il suit de là, que

$$\left|\int_{(\delta-[\eta])} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right| < \frac{1}{\eta^2}\,\delta.$$

On a donc

$$\left|\int_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right| < \frac{4\pi\eta^{\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\eta^2}\,\delta.$$

Si l'on pose

$$\eta = \delta^{\frac{1}{3}}$$

on trouve que, (δ) étant assez petite, l'intégrale (23) est plus petite qu'un nombre ε donné d'avance.

Supposons maintenant que la surface (δ) est tangente à (S) dans les points appartenants à (L). Distinguons deux cas: le cas (a), dans lequel (δ) est le prolongement de (σ_0) et le cas (b), dans lequel (δ) est le prolongement de $(S^{(0)})$.

Il est facile de construire des pareilles surfaces (δ) en traçant les droites, paralleles à une direction donnée, et en prenant sur ces droites à partir de (S) les segments proportionnels aux puissances de la distance de la droite de (L); le lieu géométrique des extrémités de ces segments possède dans le voisinage de (L) les propriétés attribuées à (δ).

Prenons maintenant le potentiel

$$v = \int\limits_{(L)} \frac{\nu(l_1)\, dl_1}{r_{10}};$$

(L) étant la frontière d'une portion (σ_0) de (S), et étudions la différence

$$(31) \qquad \int\limits_{(\sigma')} \frac{dv}{dn}\, d\sigma' - \int\limits_{(L_1)} \nu(l_1)\, k(\sigma_0, 1)\, \sigma_0\, dl_1 =$$

$$= \int\limits_{(L_1)} \nu(l_1) \left\{ \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma' - \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma \right\} dl_1.$$

Comme l'intégrale

$$\int\limits_{(L_1)} \nu(l_1) \left(\int\limits_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma \right) dl_1$$

est infiniment petite, avec (δ), si (δ) est assez petite, l'intégrale

$$- \int\limits_{(L_1)} \nu(l_1) \left(\int\limits_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma \right) dl_1.$$

dans laquelle (Σ) est la surface fermée, composée par réunion des portions (σ'), (σ_0), (δ), diffère de (31) par un nombre de la forme $a\,\varepsilon$, ε étant choisi arbitrairement. Or on a

$$-\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 = 2\pi$$

dans le cas (a) et cette intégrale est égale à zéro dans le cas (b). Il suit de là que la différence (31) diffère aussi peu qu'on le veut de $2\pi\nu(L)L$ dans le cas (a) et de zéro dans le cas (b), si certainement, la portion (σ') est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$; dans le cas contraire cette différence a pour limite $-2\pi\nu(L)L$ et zéro respectivement.

On obtient de même que pour le potentiel

$$w = \frac{1}{r_{10}}$$

la différence

$$\int_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma - \int_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma$$

a pour limite $\pm 2\pi$ dans le cas (a) et zéro dans le cas (b).

En recueillant tout ce qui a été dit on peut obtenir, en utilisant la formule (30'), que dans le cas (b)

$$\sigma_0^{(i)}(V)\,\sigma_0 = 2\pi\,\underline{\mu}(\sigma_0)\,\sigma_0, \quad \sigma_0^{(e)}(V)\,\sigma_0 = -2\pi\,\underline{\mu}(\sigma_0)\,\sigma_0$$

et dans le cas (a)

$$\sigma_0^{(i)}(V)\,\sigma_0 = 2\pi\,\bar{\mu}(\sigma_0)\,\sigma_0, \quad \sigma_0^{(e)}(V)\,\sigma_0 = -2\pi\,\bar{\mu}(\sigma_0)\,\sigma_0,$$

ce qui montre que la limite de $\sigma'(V)$ dépend effectivement de la mode de la variation de (σ'), si les conditions (17) ne sont pas satisfaites.

11. Si la condition (15) n'est pas satisfaite, le potentiel

$$V = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, \frac{d\sigma_1}{r_{10}} \tag{11}$$

peut devenir infini dans les points sur (S).

Supposons, par exemple, qu'une portion de (S) est plane et que sur cette portion

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{\rho^{\frac{3}{2}}},$$

ρ étant la distance entre le point (x) et un point fixe (x_2). L'intégrale (11) cesse d'être convergente, quand le point (x) se confond avec le point (x_2). En effet, l'intégrale (11) prise sur le domaine (σ_0) entre deux cercles concentriques, ayant leurs centres en (x_2) est égale à

$$\int\limits_{(\sigma_0)} \left(\frac{1}{\sigma_1} \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{d\sigma_1}{\rho^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d\sigma_1}{\rho} = \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{d\sigma_1}{\rho^{\frac{5}{2}}} = 2\pi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}}} = 4\pi \left[\frac{1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\rho_2^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Supposons que (σ_0) est contenu dans l'intérieur d'une sphère de Liapounoff, attachée à un de ces points (x_0). En traçant par les points de (σ_0) les droites, parallèles à la normale N_0 à (S) en (x_0), construisons sur les droites les segments de longueur δ à partir des points de (σ_0). Le lieu géométrique des extrémités de ces segments est une portion de surface (σ'), identique à (σ_0) et placée, suivant le cas, dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ ou dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

Envisageons la moyenne de V sur (σ'):

$$V(\sigma') = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} V d\sigma' = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) m(\sigma', x_1)\, d\sigma_1,$$

ayant posé

$$(32) \qquad \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{1}{r_{10}}\, d\sigma = m(\sigma, x_1).$$

On s'assure aisément que la moyenne $V(\sigma')$ tend vers la limite, qui est égale à

$$V(\sigma_0) = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) m(\sigma_0, x_1)\, d\sigma_1.$$

En effet, si δ tend vers zéro, la moyenne $m(\sigma,' x_1)$ tend uniformément sur (S_1) vers la limite égale à

$$(32) \qquad m(\sigma_0, x_1) = \frac{1}{\sigma_0} \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{d\sigma}{r_{10}}.$$

Pour le démontrer, construisons un cylindre droit, ayant les génératrices parallèles à N_0 et pour base le cercle avec le centre au point (x_1) et le rayon égale à 2δ. Les intégrales (32) prises sur les portions de (σ_0) et de (σ') dans l'intérieur de ce cylindre sont moindres que $\frac{1}{\sigma_0} 2\pi . 2\delta$. La différence des intégrales, prises sur les portions restantes de (σ_0) et de (σ') est moindre que

$$\frac{2\delta}{\sigma_0}\int\limits_{(\sigma_0-\delta)}\frac{d\sigma}{r_{10}^2} < A\delta\,|\log\delta|.$$

On a donc, si δ est assez petit

$$|m(\sigma_0, x_1) - m(\sigma', x_1)| < \varepsilon$$

pour chaque position du point (x_1) et

$$\left|\int\limits_{(S_1)}\mu(\sigma_1)\,m(\sigma_0, x_1)\,d\sigma_1 - \int\limits_{(S_1)}\mu(\sigma_1)\,m(\sigma', x_1)\,d\sigma_1\right| < \varepsilon M(S_1)\,S_1.$$

La fonction $V(\sigma)$ est une fonction absolument continue de (σ). Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que la fonction $m(\sigma, x_1)$, qui est pour chaque position du point (x_1) une fonction absolument continue de (σ), comme la moyenne d'une fonction intégrable, l'est uniformément sur (S_1). En construisant une sphère ayant le point (x_1) pour centre et un rayon δ suffisamment petit, nous avons

$$\int\limits_{(\delta)}\frac{d\sigma}{r_{10}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

en désignant par (δ) la portion de (S) découpée par cette sphère; la valeur de δ est indépendante de la position de (x_1). Étant donné un domaine (σ), nous avons, si $(\sigma\delta)$ est la portion de (S) commune à (δ) et à (σ),

$$\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{10}} = \int\limits_{(\sigma\delta)}\frac{d\sigma}{r_{10}} + \int\limits_{(\sigma-\sigma\delta)}\frac{d\sigma}{r_{10}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(\sigma - \sigma\delta)}{\delta} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{\delta},$$

Donc, si

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2}\,\delta < \eta$$

on a

$$m(\sigma, x_1)\sigma < \varepsilon.$$

Il suit de cela, que

$$|V(\sigma)\sigma| < \varepsilon \int_{(S_1)} M(\sigma_1)\, d\sigma_1 = \varepsilon M(S_1) S_1,$$

si

$$\sigma < \eta.$$

12. Étant donné le potentiel de simple couche

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1)\, d\sigma_1}{r_{10}}$$

nous donnerons aux fonctions moyennes

$$\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, k(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 + 2\pi \mu(\sigma_0), \quad \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 - 2\pi \mu(\sigma_0),$$

qui sont évidemment additives et à variation bornée, le nom des flux relatifs par la portion (σ_0) vers l'extérieur, respectivement vers l'intérieur de (S), en les désignant respectivement par $\sigma_0^{(i)}(V)$ et $\sigma_0^{(e)}(V)$.

Si la fonction $\mu(\sigma)$ est continue dans le voisinage de la frontière de (σ_0), le flux relatif ne diffère pas de flux, déterminé dans le § 5.

On démontre aisément que $\sigma^{(i)}(V)$ étant le flux relatif vers l'extérieur de (S), on a

$$\int_{(S)} \sigma^{(i)}(V)\, d\sigma = 0.$$

En effet, on obtient en utilisant le théorème du § 7 (2):

$$\int_{(S)} \sigma^{(i)}(V)\, d\sigma = \int_{(S)} \left(\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, k(\sigma, 1)\, d\sigma_1 \right) d\sigma + 2\pi \int_{(S_1)} \mu(\sigma) d\sigma =$$

$$= \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \left(\int_{(S)} k(\sigma, 1) d\sigma \right) d\sigma_1 + 2\pi \int_{(S_1)} \mu(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

car

$$\int_{(S)} k(\sigma, 1)\, d\sigma = \int_{(S)} \left(\frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma \right) d\sigma =$$

$$= \int_{(S)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma = -\int_{(S)} \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma = -2\pi.$$

On a donc

$$S^{(i)}(V) = 0.$$

Théorème. Si V est un potentiel de simple couche, on a

(33)
$$\left\{ \begin{array}{l} V = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{(S_1)} \sigma_1^{(i)}(V) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \\ \text{si } (x) \text{ est dans } (D^{(i)}); \\ V = -\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{(S_1)} \sigma_1^{(e)}(V) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \\ \text{si } (x) \text{ est dans } (D^{(e)}). \end{array} \right.$$

Pour démontrer le théorème nous établirons le lemme.

Lemme. Si le point (x_2) est sur (S_1), on a

(34)
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{r_{20}} = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}}, \\ \text{quand le point } (x) \text{ est dans } (D^{(i)}); \\ \dfrac{1}{r_{20}} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}}. \\ \text{quand le point } (x) \text{ est dans } (D^{(e)}). \end{array} \right.$$

Supposons que le point (x) est dans $(D^{(i)})$. Dans ce cas la fonction du point (x_2)

$$\frac{1}{r_{20}}$$

est une fonction harmonique dans $(D^{(e)})$. On a donc

$$\frac{1}{r_{30}} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{13} N_1)}{r_{31}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{31}},$$

si le point (x_3) est dans $(D^{(e)})$,

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{13} N_1)}{r_{31}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{31}},$$

si le point (x_3) est dans $(D^{(i)})$.

Supposons, que le point (x_2) est sur (S_1). Construisons une sphère du rayon δ, ayant le point (x_2) pour centre et désignons par (σ_0) la portion découpée de (S_1) par cette sphère. Soient (σ_1) et (σ_2) les portions de la sphère, découpées de la sphère par (S_1), en désignant par (σ_2) celle qui est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$. Le point (x_2) est dans l'intérieur du domaine, limité par $(S_1 - \sigma_0)$ et (σ_1) et dans l'extérieur du domaine, limité par $(S_1 - \sigma_0)$ et (σ_2). On a donc

$$\frac{1}{r_{20}} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}};$$

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}} -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\sigma_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}},$$

si on suppose que la normale à la sphère est dirigée vers l'extérieur. Il suit de là que $\frac{1}{r_{20}}$ diffère de

$$(35) \qquad -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{1}{r_{20}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}}$$

par

$$(35') \qquad \frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1 - \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1\right\} -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}} - \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{21}}\right\}.$$

Or on démontre aisément que la somme (35′) est infiniment petite avec δ. En effet, $\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}$ étant bornée sur la sphère, chacune des deux dernière intégrales est infiniment petite. Puis, la différence $\frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{r_{20}}$ étant infiniment petite avec δ, la première différence diffère par une infiniment petite de

$$(35'') \qquad \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{20}}\left\{\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1 - \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1\right\}.$$

Formons le cône (2ω), ayant pour l'axe la normale au point (x_2) et pour l'angle (2ω), où (ω) est le nombre mentionné dans le § 1. Remarquons, que les portions des intégrales, prises suivant les portions de (σ_1) et (σ_2), placées dans l'intérieur du cône, se détruisent dans (35″). Il suit de là, que les parenthèses dans (35″) sont en valeur absolue plus petites, que l'intégrale

$$\int \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1,$$

prise sur la zône de la sphère, placée en dehors du cône. En introduisant les coordonnées polaires, nous voyons, que cette intégrale est égale à

$$\int\limits_{\omega - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \omega} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \cos\omega.$$

Comme on peut poser

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\varepsilon\delta^\lambda} - \frac{1}{2}\varepsilon\delta^\lambda,$$

on voit que la limite de $\cos\omega$ est zéro pour $\delta \to 0$.

En passant dans (35) vers la limite en faisant $\delta \to 0$, on retrouve la première des formules (34). On démontre la seconde formule (34) de la même manière.

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

En substituant dans

$$L = \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} \sigma_1^{(i)}(V) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

à la place de $\sigma_1^{(i)}(V)$ et $V(\sigma_1)$ leurs valeurs:

$$\sigma_1^{(i)}(V) = \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) k(\sigma_1, 2) d\sigma_2 + 2\pi \mu(\sigma_1).$$

$$V_1(\sigma_1) = \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) m(\sigma_1, 2) d\sigma_2,$$

nous obtenons

$$L = \frac{1}{2} \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \left(\int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) k(\sigma_1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \left(\int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) m(\sigma_1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma_1.$$

On obtient facilement, en appliquant les théorèmes des §§ 9 (2) et 11 (2)

$$\int_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}} \left(\int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) k(\sigma_1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma_1 = \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} k(\sigma_1, 2) \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 \right) d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} \frac{d\sigma_1}{r_{10}} \right) d\sigma_2 = - \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{21}^2} \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 \right) d\sigma_2$$

$$\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \left(\int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) m(\sigma_1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma_1 =$$

$$= \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1, 2) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} \frac{1}{r_{21}} \cdot \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma_2.$$

Il suit de là qu'on a suivant le lemme

$$L = \frac{1}{2} V +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{(S_2)} \mu(\sigma_2) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{1}{r_{21}} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{12}^2} \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 \right\} d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} \int_{(S_2)} \frac{\mu(\sigma_2)\, d\sigma_2}{r_{20}} = V.$$

On démontre de la même manière la seconde formule (32).

Remarque. On démontre de la même manière que

$$\int_{(S_1)} \sigma_1^{(i)}(V) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = 0,$$

si (x) est dans $(D^{(e)})$;

$$\int_{(S_1)} \sigma_1^{(e)}(V) \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = 0,$$

si (x) est dans $(D^{(i)})$.

13. Supposons, que Γ est une fonction harmonique définie dans $(D^{(i)})$, respectivement dans $(D^{(e)})$. Si V est un potentiel de simple couche

(11) $$V = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}},$$

on a

(36) $$\int_{(S)} \left[V(\sigma) \frac{d\Gamma}{dn} - \Gamma \sigma(V) \right] d\sigma = 0,$$

où il faut mettre partout l'indice (i) si la fonction Γ est définie dans $(D^{(i)})$ et l'indice (e) dans le cas contraire.

En substituant dans (36) à la place de $V(\sigma)$ et $\sigma(V)$ leurs valeurs:

$$V(\sigma) = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, m(\sigma, x_1)\, d\sigma_1 \quad m(\sigma, x_1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{10}},$$

$$\sigma(V) = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, k(\sigma, x_1)\, d\sigma_1 \pm 2\pi \mu(\sigma), \quad k(\sigma, x_1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma,$$

nous obtenons

$$A = \int_{(S)} \left[V(\sigma) \frac{d\Gamma}{dn} - \Gamma \sigma(V) \right] d\sigma = \int_{(S)} \frac{d\Gamma}{dn} \left(\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) m(\sigma, x_1) d\sigma_1 \right) d\sigma -$$

$$- \int_{(S)} \Gamma \left(\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma, x_1) d\sigma_1 \right) d\sigma \mp 2\pi \int_{(S)} \mu(\sigma) \Gamma d\sigma.$$

Les fonctions $\Gamma, \frac{d\Gamma}{dn}$ étant continues sur (S), le théorème du § 9 (2) est applicable et nous avons:

$$A = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \left(\int_{(S)} \left[\mu(\sigma, x_1) \frac{d\Gamma}{dn} - k(\sigma, x_1) \Gamma \right] d\sigma \right) d\sigma_1 \mp 2\pi \int_{(S)} \mu(\sigma) \Gamma d\sigma =$$

$$= \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \left(\int_{(S)} \left[\frac{d\Gamma}{dn} \frac{1}{r_{10}} + \Gamma \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} \right] d\sigma \right) d\sigma_1 \mp 2\pi \int_{(S)} \mu(\sigma) \Gamma d\sigma$$

Le point (x_1) étant situé sur (S_1), on a cependant

$$\Gamma(x_1) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \left(\frac{d\Gamma}{dn} \frac{1}{r_{10}} + \Gamma \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} \right) d\sigma,$$

d'où suit que l'identité (36) a lieu effectivement.

14. Envisageons maintenant la fonction

$$W = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \tag{37}$$

dans laquelle $\mu(\sigma)$ est une fonction moyenne additive et à variation bornée et N_1 la normale à (S_1) au point (x_1) d'intégration.

On peut donner à elle le nom d'un potentiel de double couche en intégrales de Stieltjes; la fonction (37) est évidemment harmonique dans l'intérieu de $(D^{(i)})$ et dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

En prenant sur (S_1) une portion de surface (σ_0), en la choisissant suffisamment petite, construisons dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, respectivement dans l'intérieur de $(D^{(e)})$, suivant la règle donnée dans le § 11 une portion de

surface (σ') qui est identique à (σ_0) et envisageons la moyenne de W sur cette surface

$$W(\sigma') = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} W(x)\, d\sigma.$$

Comme dans les points sur (σ') la fonction

$$\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}$$

est bornée, nous avons

$$W(\sigma') = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \Big(\int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 \Big)\, d\sigma = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, l(\sigma', x_1)\, d\sigma,$$

ayant posé

$$l(\sigma, x_1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma.$$

Si la distance δ entre les portions (σ_0) et (σ') tend vers zéro, la moyenne $W(\sigma')$ peut avoir une limite; nous désignerons cette limite par $W^{(i)}(\sigma_0)$, si (σ') est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, et par $W^{(e)}(\sigma_0)$, si (σ') est dans $(D^{(e)})$.

Théorème. Soit donné un potentiel de double couche

$$W = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 \tag{38}$$

dans lequel la densité moyenne $\mu(\sigma)$ est une fonction additive et à variation bornée.

Soit donné une portion (σ_0) de (S). Si l'on a

$$\underline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \quad \overline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \tag{17}$$

la moyenne de W a une limite déterminée, quand (σ') tend vers (σ_0) et on a

$$\begin{aligned} W^{(i)}(\sigma_0) &= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, l(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 + 2\pi\, \mu(\sigma_0), \\ W^{(e)}(\sigma_0) &= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, l(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 - 2\pi\, \mu(\sigma_0) \end{aligned} \tag{39}$$

où

$$l(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma. \tag{40}$$

Ici $M(\sigma)$ désigne la borne moyenne de la fonction $\mu(\sigma)$. Les conditions (17) sont satisfaites, si la fonction $\mu(\sigma)$ est continue dans un domaine, pour lequel les points sur la frontière de (σ_0) sont les points intérieurs; cela a lieu, si la fonction $\mu(\sigma)$ est continue sur (S); si la condition

$$M(\sigma_0) r_0^{1-\lambda} < B \tag{15}$$

du § 6 est satisfaite, cela a lieu pour chaque domaine (σ_0) limité par une courbe rectifiable.

La fonction moyenne (40) est continue comme la fonction du point (x_1) sur (S_1); c'est la valeur sur (S) de la dérivée normale du potentiel de simple couche

$$-\int\limits_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{10}},$$

dans lequel la densité μ est égale à $\frac{1}{\sigma}$ sur (σ) et à zéro en dehors de (σ). On s'assure sans peine que la borne moyenne de $l(\sigma, 1)$ est égale à

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma.$$

Pour le démontrer il suffit de reproduire les raisonnements du § 4 (1). On peut entourer le point (x_1) avec une portion de surface (δ) découpée par une sphère, dont le rayon est assez petit pour qu'on ait

$$\left| \int\limits_{(\delta)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right| < \int\limits_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Étant donnée une portion de surface (σ), décomposons $(\sigma - \sigma\delta)$, $(\sigma\delta)$ désignant la portion commune à (σ) et à (δ), en portions $(\sigma_2), \ldots (\sigma_n)$.

Comme on a

$$|l(\sigma\delta)|\,(\sigma\delta)+|l(\sigma_2)|\,\sigma_2+\cdots+|l(\sigma_n)|\,\sigma_n=$$
$$=\theta\frac{\varepsilon}{3}+\frac{|\cos(r_{12}N_1)|}{r_{12}^2}\sigma_2+\cdots+\frac{|\cos(r_{1n}N_1)|}{r_{1n}^2}\sigma_n,$$

les points (x_2), ... (x_n) étant situés dans (σ_2), ... (σ_n) et, comme n étant assez grand, la somme à droite diffère de

$$\frac{\theta\varepsilon}{3}+\int\limits_{(\sigma-\sigma\delta)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma$$

moins que $\frac{\varepsilon}{3}$, on voit que, ε étant arbitraire,

$$\int\limits_{(\sigma)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma\leqq L(\sigma,1)\,\sigma+\varepsilon,$$

si on désigne par $L(\sigma,1)$ la variation moyenne de $l(\sigma,1)$.

Or les fonctions

$$l_1(\sigma,1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma+\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right\}$$

$$l_2(\sigma,1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma-\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right\}$$

ont toutes leurs valeurs positives; il suit de là que

$$L(\sigma,1)\leqq\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma,$$

d'où suit l'égalité

$$L(\sigma,1)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2}\,d\sigma.$$

En reproduisant de même les raisonnements du § 5, on démontre aisément que la borne totale de $l(\sigma,1)$ est continue, d'où suit que la fonction moyenne $l(\sigma,1)$ répond aux conditions du § 9 (2), c'est-à-dire à la condition (A) du § 1 (3).

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Ayant posé

$$l(\sigma_0, x_1) = \frac{1}{\sigma_0} \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\sigma_0} \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10} N_1) - \cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma = p(\sigma_0, x_1) + q(\sigma_0, x_1)$$

$$l(\sigma', x_1) = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{\cos(r_{10} N_1) - \cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma = p(\sigma', x_1) + q(\sigma', x_1)$$

nous avons

$$(41) \qquad W(\sigma') - W(\sigma) = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \{p(\sigma', x_1) - p(\sigma_0, x_1)\} d\sigma_1 +$$

$$+ \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \{q(\sigma', x_1) - q(\sigma_0, x_1)\} d\sigma_1.$$

La première intégrale est étudiée par nous dans le § 5. Nous y avons démontré, que

$$\lim \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) p(\sigma', x_1) d\sigma_1 = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) p(\sigma_0, x_1) d\sigma_1 \pm 2\pi \mu(\sigma_0),$$

si les conditions (17) sont satisfaites.

Il reste à étudier la séconde intégrale; nous démontrerons que

$$\lim q(\sigma', x_1) = q(\sigma_0, x_1),$$

si

$$(\sigma) \longrightarrow (\sigma_0)$$

et que la variable $q(\sigma', x_1)$ tend vers sa limite uniformément sur (S_1).

Désignons pour la commodité les points sur (σ') par (x_2), par r_{12} leurs distances du point (x_1). Remarquons que les normales à (σ_0) et à (σ') dans

les points (x) et (x_2), qui sont placés sur une même parallèle à N_0, ont une même direction N_0 et que (σ') ne diffère pas par sa forme de (σ_0). Nous avons

$$(42)\quad \left|\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{12}N_1)-\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2}\,d\sigma - \int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right| \leqq$$

$$< \left|\int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos(r_{12}N_1)-\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2}\,d\sigma\right| + \left|\int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{(\sigma_0-2\delta)} \left\{\frac{\cos(r_{12}N_1)-\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2} - \frac{\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\right\} d\sigma\right|$$

en désignant par (2δ) la portion commune à (σ_0) et à la portion de (S) découpée par une sphère du rayon 2δ, ayant son centre au point (x_1).

Comme on a

$$|\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)| < Er_{10}^{\lambda},$$

$$|\cos(r_{21}N_1)-\cos(r_{21}N_0)| < (N_1N_0) < Er_{10}^{\lambda},$$

la seconde intégrale dans (42) est plus petite que le produit de ε par

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{d\sigma}{r_{10}^{2-\lambda}} < 2\,.\,2\pi\int\limits_0^{2\delta} \frac{d\rho}{\rho^{1-\lambda}} = \frac{4\pi}{\lambda}(2\delta)^{\lambda},$$

ρ étant la projection de r_{10} sur le plan tangent à (S) en (x_1); la première intégrale dans (42) est respectivement plus petite que

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{r_{10}^{\lambda}\,d\sigma}{r_{12}^2} < \frac{2^2}{\delta^2}\int\limits_{(2\delta)} r_{10}^{\lambda}\,d\sigma < \frac{2^{2-\lambda}\cdot 4\pi(2\delta)^{2+\lambda}}{\delta^2} < a\delta^{\lambda};$$

car si la plus courte distance du point (x_2) de (S) est égale à δ_1, on a, vu l'inégalité $(1')$ du § 1

$$\delta_1 = \delta\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} > \delta\sin\alpha_1 > \delta\sin(\omega-30^\circ) > \frac{1}{2}\,\delta,$$

α_1 et α étant les angles du triangle, dont les côtés sont égaux à δ_1 et δ et ω est l'angle qui est mentionné dans le § 1.

En passant à la troisième intégrale nous avons:

$$(43)\qquad \frac{\cos(r_{12}N_1)-\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2}-\frac{\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}=$$

$$=\frac{r_{12}\cos(r_{12}N_1)-r_{12}\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^3}-\frac{r_{10}\cos(r_{10}N_1)-r_{10}\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^3}=$$

$$=\frac{(r_{12}\cos(r_{12}N_1)-r_{10}\cos(r_{10}N_1))-(r_{12}\cos(r_{12}N_0)-r_{10}\cos(r_{10}N_0))}{r_{12}^3}+$$

$$+\left(\cos(r_{10}N_1)-\cos(r_{10}N_0)\right)\frac{(r_{10}-r_{12})(r_{10}^2+r_{11}.r_{12}+r_{12}^2)}{r_{12}^3\,r_{10}^2}.$$

Le premier terme dans (43) est égal à

$$\frac{\delta(\cos(\delta N_1)-\cos(\delta N_0))}{r_{10}^3}$$

et est en valeur absolue plus petit que

$$\frac{\delta E r_{10}^{\lambda}}{r_{12}^3}<\frac{8\delta E}{r_{10}^{3-\lambda}}$$

car sur $(\sigma-\delta)$:

$$\frac{r_{12}}{r_{10}}>1-\frac{\delta}{r_{10}}>\frac{1}{2},\quad \frac{r_{12}}{r_{10}}<1+\frac{\delta}{r_{10}}<\frac{3}{2},$$

r_{10} étant plus grand que 2δ.

L'intégrale correspondante est plus petite que

$$8\delta E\,4\pi\int_{\delta}^{d}\frac{d\rho}{\rho^{2-\lambda}}=\frac{8\delta.E\,4\pi}{1-\lambda}\left\{\frac{1}{\delta^{1-\lambda}}-\frac{1}{d^{1-\lambda}}\right\}<c\delta^{\lambda}.$$

Le second terme dans (43) est en valeur absolue plus petit que

$$\frac{8Er_{10}^{\lambda}\delta\left(1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}{r_{10}^3}<b\,\frac{\delta}{r_{10}^{3-\lambda}}$$

et l'intégrale correspondante est de nouveau de la forme $C\delta^{\lambda}$.

Il suit de là, que si δ est assez petit, on a

$$\left| \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \{q(\sigma', x_1) - q(\sigma_0, x_1)\} \, d\sigma_1 \right| < \frac{\varepsilon M(S) S}{\sigma_0}.$$

Ainsi on a sous les conditions (17)

$$\lim W(\sigma') = W(\sigma_0) \pm 2\pi \mu(\sigma_0)$$

en posant pour la brièveté

$$W(\sigma_0) = \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) l(\sigma_0, 1) \, d\sigma_1.$$

CHAPITRE 6

Le problème de Neumann

1. Soit donné un domaine $(D^{(i)})$, limité par la frontière (S), qui répond aux conditions énumérées dans le § 1 (5). En désignant par (σ) les portions de la surface (S), supposons donnée une fonction moyenne $u(\sigma)$, qui est additive et à variation bornée.

Désignons, suivant les notations du § 5 (5) par $\sigma'(V)$ le flux d'une fonction V par une portion d'une surface (σ'), qui est placée dans l'intérieur d'un des domaines $(D^{(i)})$, $(D^{(e)})$, c'est-à-dire posons

(1) $$\sigma'(V) = \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \frac{dV}{dn} \, d\sigma$$

et proposons-nous de résoudre le problème (A): trouver une fonction V, harmonique dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ ou dans l'intérieur de $(D^{(e)})$, telle qu'on ait pour chaque portion (σ) de la surface (S):

(2) $$\sigma^{(i)}(V) = u(\sigma), \text{ respectivement, } \sigma^{(e)}(V) = u(\sigma),$$

où $\sigma^{(i)}(V)$, respectivement, $\sigma^{(e)}(V)$, sont les limites de la quantité (1), vers lesquelles elle tend, quand (σ') tend vers (σ), étant dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, respectivement, dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

En parlant des domaines $(D^{(i)})$ et $(D^{(e)})$ nous supposons toujours que $(D^{(e)})$ contient le point à l'infini et nous distinguons, comme il a été exposé dans le § 1 (5), les trois cas suivants:

α) Le cas ordinaire, quand (S) est une surface fermée.

β) Le cas (I), quand (S) est composée des surfaces fermées séparées

$$(S^{(0)}),\ (S^{(1)},\ \ldots,\ (S^{(k)}),$$

dont la première forme la frontière extérieure de $(D^{(i)})$ et les autres, étant placées dans l'intérieur du domaine, limité par $(S^{(0)})$, forment les frontières intérieures. Le domaine $(D^{(e)})$ n'est pas connexe.

γ) Le cas (E), quand plusieurs surfaces fermées $(S^{(1)}), \ldots (S^{(m)})$ délimitent un domaine connexe $(D^{(e)})$; le domaine $(D^{(i)})$ n'est pas connexe.

2. En abordant le problème (A) nous supposerons que la fonction $u(\sigma)$ est continue.

Rappelons nous que la condition du théorème de § 5 (5)

$$\underline{U}(\sigma_0) = U(\sigma_0), \quad \overline{U}(\sigma_0) = U(\sigma_0), \tag{3}$$

où $U(\sigma)$ est la variation moyenne de $u(\sigma)$, est satisfaite pour chaque domaine (σ_0) si la fonction $u(\sigma)$ est continue.

Ayant fait cette restriction, substituons au problème (A) le problème (B) suivant: trouver un potentiel de simple couche

$$V = \int\limits_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1)\, d\sigma_1}{r_{10}} \tag{4}$$

satisfaisant à la condition

$$\sigma^{(i)}(V) = u(\sigma)$$

dans le cas du problème intérieur et à la condition

$$\sigma^{(e)}(V) = u(\sigma)$$

dans le cas du problème extérieur; nous désignons par r_{10} la distance entre le point (x) et un point (x_1) sur (S), ayant la direction vers le point (x_1).

Le potentiel V étant une fonction harmonique dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, ainsi que dans l'intérieur de $(D^{(e)})$, le problème (B) n'est qu'un cas particulier du problème (A); si le problème (A) a une solution unique

et si le problème (B) a toujours une solution, les problèmes (A) et (B) sont équivalents.

En se rappelant la remarque du § 12 (5) nous voyons que dans le cas ordinaire le problème (B) intérieur est possible seulement si l'on a

$$u(S) = 0,$$

car V étant le potentiel de simple couche on doit avoir

$$S^{(i)}(V) = 0.$$

Par la même raison le problème (B) intérieur dans le cas (E) est possible seulement si l'on a

$$u(S^{(l)}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots k,$$

dans le cas (I) on peut poser le problème extérieur (B) seulement si l'on a

$$u(S^{(l)}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots k, \quad (l \neq 0).$$

Rappelons que nous désignons par (S_1), (σ_1) la surface (S) et ses portions (σ), si (S) est traitée comme le lieu géométrique des points (x_1). Nous désignerons la surface (S) et ses portions par (S_i), (σ_i), si elles sont traitées comme le lieu géométrique des points (x_i).

Suivant le théorème du § 5 (5), si pour un certain domaine (σ_0) on a

$$\underline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \quad \overline{M}(\sigma_0) = M(\sigma_0), \tag{3'}$$

$M(\sigma)$ étant la variation moyenne de $\mu(\sigma)$, les limites $\sigma_0^{(i)}(V)$, $\sigma_0^{(c)}(V)$ existent et on a

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(i)}(V) &= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 + 2\pi \mu(\sigma_0), \\ \sigma_0^{(c)}(V) &= \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 - 2\pi \mu(\sigma_0) \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$k(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma, \tag{6}$$

N_0 étant la normale au point (x) situé sur (σ).

La fonction (6) est continue comme une fonction du point (x_1) situé sur (S). Comme conséquence des égalités (5) nous avons

(7)
$$\sigma_0^{(i)}(V) + \sigma_0^{(e)}(V) = 2\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma_0, 1) d\sigma_1,$$
$$\sigma_0^{(i)}(V) - \sigma_0^{(e)}(V) = 4\pi\mu(\sigma_0).$$

Les égalités (5) et (7) montrent que pour résoudre le problème (B) on peut suivre la marche ordinairement adaptée pour la résolution du problème de Neumann. Substituons à la place du problème (B) le problème plus général de la résolution de l'équation

(8)
$$\sigma^{(i)}(V) - \sigma^{(e)}(V) = -2\xi\sigma(V) + 2u(\sigma),$$

dans laquelle

(9)
$$\sigma(V) = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma, 1) d\sigma_1.$$

Si V est la solution de l'équation (8), la valeur de V pour $\xi = 1$, résout le problème intérieur et la valeur de V pour $\xi = -1$, le problème extérieur, en supposant, certainement, que la fonction V a un sens pour $\xi = 1$, respectivement pour $\xi = -1$.

En effet pour $\xi = 1$ nous avons:

$$\sigma^{(i)}(V) - \sigma^{(e)}(V) = -2\sigma(V) + 2u(\sigma) = -\sigma^{(i)}(V) - \sigma^{(e)}(V) + 2u(\sigma),$$
$$\sigma^{(i)}(V) = u(\sigma);$$

pour $\xi = -1$ nous avons:

$$\sigma^{(i)}(V) - \sigma^{(e)}(V) = 2\sigma(V) + 2u(\sigma) = \sigma^{(i)}(V) + \sigma^{(e)}(V) + 2u(\sigma),$$
$$\sigma^{(e)}(V) = -u(\sigma).$$

En substituant dans (8) à la place de $\sigma(V)$ sa valeur (9) et en utilisant la seconde des égalités (7), nous obtenons l'équation intégrale

$$2\pi\mu(\sigma) = -\xi\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k(\sigma, 1) d\sigma_1 + u(\sigma)$$

qui définit la fonction $\mu(\sigma)$.

La forme de l'équation obtenue montre qu'il est plus commode de désigner la densité inconnue du potentiel de simple couche par $\frac{1}{2\pi}\mu(\sigma)$ en écrivant

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} \tag{4'}$$

à la place de (4), ce qui conduit à l'équation

$$\mu(\sigma) = -\frac{\xi}{2\pi}\int_{(S)} \mu(\sigma_1)k(\sigma, 1)\,d\sigma_1 + u(\sigma). \tag{10}$$

Remarque. En s'occupant du problème (B) on peut le généraliser considérablement en laissant à côté la supposition que la fonction moyenne $u(\sigma)$ est continue.

En effet, ayant posé le problème: trouver un potentiel (4) de simple couche pour lequel le flux relatif vers l'extérieur, respectivement vers l'intérieur de (S), est égal à $u(\sigma)$, nous parvenons à la même équation (8), car les formules (5) donnent les expressions des flux relatifs; quand à l'équation (8), c'est le point de départ pour tous les raisonnements de ce chapitre.

Nous avons remarqué dans le § 5 (5) que le noyau

$$-\frac{1}{2\pi}k(\sigma, 1)$$

de l'équation (10) répond à la condition (A) du § 1 (3). La fonction $k(\sigma, 1)$ est, effectivement, continue comme fonction du point (x_1) sur (S) pour chaque choix du domaine (σ) et sa borne totale

$$\frac{1}{2\pi}K(\sigma, 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \frac{|\cos(r_{10}N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma$$

est bornée comme fonction de (x_1). Le noyau $k(\sigma, 1)$ n'est pas, cependant, fini.

On obtient une solution formelle de l'équation (10) en posant

$$\mu(\sigma) = u(\sigma) + \xi\mu_1(\sigma) + \xi^2\mu_2(\sigma) + \cdots \tag{11}$$

$$\mu_k(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} k(\sigma, 1)\mu_{k-1}(\sigma_1)\,d\sigma_1, \quad \mu_0(\sigma) = u(\sigma); \tag{12}$$

nous avons démontré, en effet, dans le § 9 (2), que la fonction $\mu_k(\sigma)$ donnée par la formule (12), est à variation bornée, si la fonction $\mu_{k-1}(\sigma)$ est à variation bornée, d'où suit que la formation de la série (11) est possible.

La série (11) conduit à la solution de l'équation (8):

(13) $$V(0) = V_1(0) + \xi V_2(0) + \cdots,$$

où

(14) $$V_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} u(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \quad V_k(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \mu_{k-1}(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Nous désignons ici, comme partout, par $f(0)$, $f(1)$, . . . les fonctions des points (x), (x_1), . . .

Comme on a

$$\sigma(V_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \mu_{k-1}(\sigma)k(\sigma, 1)d\sigma_1 = -\mu_k(\sigma)$$

on peut écrire

(15) $$V_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \sigma_1(V_{k-1})\frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

ce qui permet de calculer les fonctions V_1, V_2, . . . pas à pas sans avoir recours aux fonctions $\mu_1(\sigma)$, $\mu_2(\sigma)$, . . .

La formule (13) donne une solution effective, si le rayon de convergence de la série (13) surpasse l'unité. La question principale est, donc, dans l'étude de la convergence de la serie (13).

3. On s'assure aisément que chaque fonction moyenne $v(\sigma)$, donnée par l'égalité

$$v(\sigma) = \int_{(S_1)} w(\sigma_1)k(\sigma, 1)d\sigma_1,$$

dans laquelle $w(\sigma_1)$ est une fonction additive et à variation bornée, est absolument continue.

Nous avons démontré que la fonction $k(\sigma, 1)$ est absolument continue sur (S) et cela uniformément sur (S_1).

Il suit de là que, $W(\sigma)$ étant la borne moyenne de $w(\sigma)$ et (σ) étant divisée en portions $(\sigma^{(1)})$, $(\sigma^{(2)})$, . . . $(\sigma^{(m)},)$ on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} |v(\sigma^{(i)})| \sigma^{(i)} < \sum_{i=1}^{i=n} \left| \int_{(S_1)} w(\sigma_1) k(\sigma^{(i)}, 1) d\sigma_1 \right| \cdot \sigma^{(i)} <$$

$$< \int_{(S_1)} W(\sigma_1) \sum_{i=1}^{i=n} |k(\sigma^{(i)}, 1)| \sigma^{(i)} \cdot d\sigma_1 < \int_{(S_1)} W(\sigma_1) K(\sigma, 1) \sigma d\sigma_1 <$$

$$< \varepsilon W(S) S,$$

si

$$\sigma < \eta.$$

ce qui était à démontrer.

Par conséquent pour chaque choix de la fonction $u(\sigma)$ à variation bornée toutes les fonctions

(17) $$\mu_1(\sigma),\ \mu_2(\sigma),\ \ldots,\ \mu_k(\sigma),\ \ldots$$

sont absolument continues sur (S); les fonctions

(18) $$\sigma(V_1),\ \sigma(V_2),\ \ldots,\ \sigma(V_k),\ \ldots$$

sont également absolument continues.

En s'occupant de la discussion de l'équation (10), on peut laisser de côté la supposition faite au § 2, suivant laquelle la fonction $u(\sigma)$ est continue, en supposant qu'elle soit seulement additive et à variation bornée.

4. Comme le noyau

$$-\frac{1}{2\pi} k(\sigma, 1)$$

répond à la condition (A), à l'équation (10) sont applicables les considérations du § 7 (3).

En appliquant le procédé d'itération, on peut affirmer que la fonction $\mu(\sigma)$ vérifie l'équation

(19) $$\mu(\sigma) = \xi^n \int_{(S_1)} k_n(\sigma, 1) \mu(\sigma_1) d\sigma_1 + s_n(\sigma),$$

où

$$(19') \quad s_n(\sigma) = u(\sigma) + \xi \int\limits_{(S_1)} k_1(\sigma, 1) u(\sigma_1) d\sigma_1 + \xi^2 \int\limits_{(S_1)} k_2(\sigma, 1) u(\sigma_1) d\sigma_1 + \\ + \cdots + \xi^{n-1} \int\limits_{(S_1)} k_{n-1}(\sigma, 1) u(\sigma_1) d\sigma_1,$$

si elle vérifie l'équation (10).

Nous désignons ici par $k_n(\sigma, 1)$ le noyau itéré

$$k_n(\sigma, 1) = \int\limits_{(S_2)} k_1(\sigma, 2) k_{n-1}(\sigma_2, 1) d\sigma_2 = \int\limits_{(S_2)} k_m(\sigma, 2) k_{n-m}(\sigma_2, 1) d\sigma_2$$

ayant posé, pour simplifier les formules,

$$k_1(\sigma, 1) = -\frac{1}{2\pi} k(\sigma, 1).$$

Rappelons-nous, qu'il est démontré dans le § 7 (3) que le noyau $k_n(\sigma, 1)$ répond à la condition (A), si le noyau $k_1(\sigma, 1)$ répond à cette condition.

Réciproquement, si un des noyaux itérés $k_n(\sigma, 1)$ est fini, la solution de l'équation (19), qui correspond à ce noyau, vérifie aussi l'équation (10); dans ce cas la solution $\mu(\sigma)$ de l'équation (10) est pour chaque choix de $u(\sigma)$ une fonction méromorphe de ξ et pour s'assurer que le rayon de convergence de la série (13) surpasse l'unité, il suffit de s'assurer que cette fonction méromorphe n'a pas des pôles dont les modules ne surpassent pas l'unité.

5. L'équation associée à l'équation

$$(10) \qquad \mu(\sigma) = -\frac{\xi}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} k(\sigma, 1) \mu(\sigma_1) d\sigma_1 + u(\sigma)$$

a la forme

$$(20) \qquad \varphi(x_1) = -\frac{\xi}{2\pi} \int\limits_{(S)} k(\sigma, 1) \varphi(x) d\sigma + F(x_1).$$

Or, suivant les théorèmes du § 11 (2), si la fonction $\varphi(x)$ est bornée nous avons

$$\int\limits_{(S)} k(\sigma,\ 1)\varphi(x)\,d\sigma = \int\limits_{(S)}\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\Big)\varphi(x)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\varphi(x)\,d\sigma = -\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{10}}\varphi(x)\,d\sigma,$$

car l'intégrale

$$\int\limits_{(S)}\frac{|\cos(r_{10}N_0)|}{r_{10}^2}\,d\sigma$$

est convergente; on peut, donc, donner à l'équation (20) la forme

$$\text{(20')}\qquad \varphi(x_1) = \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{01}^2}\varphi(x)\,d\sigma + F(x_1).$$

Nous voyons, ainsi, que l'équation, qui est associée à l'équation (10), est l'équation bien connue, attachée au problème de Dirichlet.

En posant

$$k_1(0,\ 1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}$$

et

$$k_n(0,\ 1) = \int\limits_{(S_2)} k_1(0,\ 2)\,k_{n-1}(2,\ 1)\,d\sigma_2,$$

nous obtenons, en appliquant le procédé d'itération à l'équation (20), que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$\text{(21)}\qquad \varphi(x_1) = \xi^n\int\limits_{(S)} k_n(0,\ 1)\varphi(x)\,d\sigma + \bar{s}_n(x_1),$$

où

$$\text{(21')}\qquad \bar{s}_n(x_1) = F(x_1) + \xi\int\limits_{(S)} k_1(1,\ 0)F(x)\,d\sigma +$$

$$+ \cdots + \xi^{n-1}\int\limits_{(S)} k_{n-1}(1,\ 0)F(x)\,d\sigma.$$

La légitimité du procédé d'itération repose sur l'identité

$$\int_{(S)} k_{m-1}(0,\,1)\left(\int_{(S_2)} k_1(2,\,0)\,\varphi(x_2)\,d\sigma_2\right)d\sigma = \tag{22}$$

$$= \int_{(S_2)} \varphi(x_2)\left(\int_{(S)} k_{m-1}(0,\,1)\,k_1(2,\,0)\,d\sigma\right)d\sigma_2.$$

Ayant besoin d'une identité plus générale, nous établirons, entre autres, l'identité (22).

6. *Lemme.* Étant données deux fonctions:

$$A(0,\,1) = \frac{C_1(0,\,1)}{r_{10}^{\,2-\mu}}, \quad B(0,\,1) = \frac{C_2(0,\,1)}{r_{10}^{\,2-\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leqq 1, \quad 0 < \mu \leqq 1,$$

dans lesquelles les numérateurs $C_1(0,\,1)$ et $C_2(0,\,1)$ sont bornés, l'intégrale

$$I = \int_{(S_2)} \frac{C_1(0,\,2)}{r_{2,0}^{\,2-\mu}} \cdot \frac{C_2(2,\,1)}{r_{2,1}^{\,2-\lambda}}\,d\sigma_2 \tag{23}$$

est une fonction de la forme

$$\frac{G(0,\,1)}{r_{10}^{\,2-\mu-\lambda}}$$

si

$$\mu + \lambda < 2$$

et de la forme

$$G(0,\,1)\,|\log r_{10}|,$$

si

$$\mu + \lambda = 2,$$

la fonction $G(0,\,1)$ étant bornée.

Décrivons autour du point (x) comme centre une sphère de Liapounoff et une sphère du rayon $2r_{10}$; supposons que (Σ_2) et (σ_2) sont les portions découpées de (S_2) par ces sphères. Nous avons:

$$I = \int_{(S_2-\Sigma_2)} \frac{C_1(0,\,2)\,C_2(2,\,1)}{r_{20}^{\,2-\mu}\,r_{21}^{\,2-\lambda}}\,d\sigma_2 + \int_{(\Sigma_2-\sigma_2)} \frac{C_1(0,\,2)\,C_2(2,\,1)}{r_{20}^{\,2-\mu}\,r_{21}^{\,2-\lambda}}\,d\sigma_2 + \tag{24}$$

$$+ \int_{(\sigma_2)} \frac{C_1(0,\,2)\,C_2(2,\,1)}{r_{20}^{\,2-\mu}\,r_{21}^{\,2-\lambda}}\,d\sigma_2.$$

La première des trois intégrales (24) est bornée, car r_{20} et r_{21} y restent supérieurs à $\frac{d}{2}$, si l'on suppose que r_{10} soit plus petit que $\frac{d}{2}$.

Évaluons la seconde intégrale. Comme le point (x_2) est situé en dehors de la sphère du rayon $2r_{10}$, on a $r_{21} > \frac{1}{2} r_{20}$.* Il suit de là, qu'en choisissant les coordonnées cylindriques ayant le pôle en (x) et pour le plan polaire le plan tangent à (S_2) en (x), nous avons

$$\left| \int\limits_{(\Sigma_2-\sigma_2)} \frac{C_1(0, 2)\, C_2(2, 1)}{r_{20}^{2-\mu}\, r_{21}^{2-\lambda}}\, d\sigma_2 \right| < B^2\, 2^{2-\lambda} \int\limits_{(\Sigma_2-\sigma_2)} \frac{d\sigma_2}{r_{20}^{4-\mu-\lambda}} <$$

$$< B^2\, 2^{2-\lambda}\, 4\pi \int\limits_{r_{10}}^{d} \frac{\rho d\rho}{\rho^{4-\mu-\lambda}} < B^2 \frac{2^{2-\lambda}\, 4\pi}{2-\mu-\lambda} \frac{1}{r_{10}^{2-\mu-\lambda}}.^{**}$$

On voit donc, que le produit de la seconde intégrale par $r_{10}^{2-\mu-\lambda}$ est borné. Passons à la dernière des intégrales (24). Divisons r_{10} en deux parties égales par un plan, qui lui est perpendiculaire. Ce plan divisera (σ_2) en deux portions: en portion (σ_0) qui contient le point (x) et en portion (σ_1) contenant le point (x_1). La dernière intégrale (24) sera égale à la somme des deux intégrales, prises suivant (σ_0) et (σ_1). Étudions la première d'entre elles. Pendant que nous intégrons sur (σ_0), r_{12} est plus grand que $\frac{1}{2} r_{10}$. Il suit de là

$$\left| \int\limits_{(\sigma_2)} \frac{C_1(0, 2)\, C_2(2, 1)}{r_{20}^{2-\mu}\, r_{21}^{2-\lambda}}\, d\sigma_2 \right| < \frac{B^2\, 2^{2-\lambda}}{r_{10}^{2-\lambda}} \int\limits_{(\sigma_2)} \frac{d\sigma_2}{r_{20}^{2-\mu}} <$$

$$< \frac{B^2\, 2^{2-\lambda}}{r_{10}^{2-\lambda}}\, 4\pi \int\limits_{0}^{2r_{10}} \frac{\rho d\rho}{\rho^{2-\mu}} = \frac{B^2\, 2^{2-\lambda}\, 4\pi}{r^{2-\lambda}} (2r_{10})^{\mu}.$$

---

* $$r_{21} - r_{20} > -r_{10}, \quad \frac{r_{21}}{r_{20}} > 1 - \frac{r_{10}}{r_{20}} > \frac{1}{2}.$$

** Si α est l'angle entre r_{10} et sa projection sur le plan polaire, on a

$$r_{10} \cos \alpha = r_{10} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > r_{10} \sin \omega > \frac{1}{2} r_{10},$$

(ω) étant l'angle mentionné dans le § 1 (5).

On voit donc que le produit de cette intégrale par $r_{10}^{2-\mu-\lambda}$ est borné. De la même manière, en désignant par (σ_2') la portion de (S_2) découpée par une sphère ayant le centre en (x_1) et le rayon égal à $3r_{10}$, qui contient (σ_2) dans son intérieur, et en remarquant que pendant l'intégration sur (σ_1) r_{20} reste plus grand que $\frac{1}{2} r_{10}$, nous obtenons

$$\left| \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{C_1(0, 2)\, C_2(2, 1)}{r_{20}^{2-\mu}\, r_{21}^{2-\lambda}}\, d\sigma_2 \right| < \frac{B^2\, 2^{2-\mu}}{r_{10}^{2-\mu}} \int\limits_{(\sigma_2')} \frac{d\sigma_2}{r_{12}^{2-\lambda}} < \frac{B^2\, 2^{2-\lambda}\, 4\pi}{r_{10}^{2-\mu}} (3r_{10})^{\lambda}.$$

En recueillant tout ce qui a été dit, nous avons

$$|I|\, r_{10}^{2-\lambda-\mu} < B_1$$

B_1 étant un nombre déterminé.

Si l'on a $\lambda = \mu = 1$, la seconde des intégrales (24) est de la forme $C|\log r_{10}|$, tandis que les intégrales, étendues sur (σ_0) et (σ_1), sont finies.

Comme sur la surface de Liapounoff on a

$$\left| \frac{\cos (r_{10} N_0)}{r_{10}^2} \right| r_{10}^{2-\lambda} < B,$$

le lemme conduit à la conclusion: si le nombre n satisfait à la condition

$$2 - (n-1)\lambda \geqq 0, \quad 2 - n\lambda < 0,$$

le noyau $k_n\,(0, 1)$ est fini; si $m < n$, on a

$$|k_m(0, 1)|\, r_{10}^{2-m\lambda} < B, \quad (|k_m(0, 1)|\, |\log r_{10}| < B \text{ si } 2 - m\lambda = 0).$$

Si le noyau $k_n(0, 1)$ est fini, les noyaux $k_m(0, 1)$, $m > n$, le sont aussi. On a, par exemple,

$$k_{n+1}(0, 1) = \int\limits_{(S_2)} k_1(0, 2) k_n(2, 1)\, d\sigma_2 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_2)} k_n(2, 1) \frac{\cos (r_{20} N_0)}{r_{20}^2}\, d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_{(S_2)} k_n(0, 2) k_1(2, 1)\, d\sigma_2 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_2)} k_n(0, 2) \frac{\cos (r_{21} N_2)}{r_{21}^2}\, d\sigma_2$$

et $k_{n+1}(0, 1)$ est fini sur (S) comme la valeur d'un potentiel de double couche ou d'une dérivée normale d'un potentiel de simple couche. Les dernières formules montrent encore que $k_{n+1}(0, 1)$ est continu sur (S) comme fonction du point (x) et sur (S_1) comme fonction du point (x_1). Remarquons encore, pour la suite, qu'on a

$$|k_{n+1}(x', 1) - k_{n+1}(x'', 1)| < \varepsilon,$$

si

$$|x' - x''| < \eta,$$

où le nombre η ne dépend pas de la position du point (x_1).

7. Notre but principal est de démontrer le théorème:

$$k_m(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} k_m(0, 1)\, d\sigma. \tag{25}$$

Comme on a

$$k_1(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} k_1(0, 1)\, d\sigma$$

on peut supposer, que l'égalité (25) a lieu pour tous les indices m' qui sont plus petits qu'un nombre donné m. On peut, donc, supposer que

$$k_{m-1}(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} k_{m-1}(0, 1)\, d\sigma. \tag{25'}$$

Nous parvenons facilement à l'identité (25) si nous démontrons l'identité

$$\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2, 1) \left(\int\limits_{(\sigma)} k_1(0, 2)\, d\sigma \right) d\sigma_2 = \int\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2, 1) k_1(0, 2)\, d\sigma_2 \right) d\sigma, \tag{26}$$

dans laquelle (σ) est une portion de (S).

L'identité (22) n'est qu'un cas particulier de l'identité (26), le facteur $\varphi(x_2)$ n'ayant aucune importance, car on peut lors la démonstration remplacer le produit $k_1(2, 0)\, \varphi(x_2)$ par la fonction $\overline{k}_1(2, 0)$ ayant les mêmes propriétés que la fonction $k_1(2, 0)$.

Prenons sur (S) le point (x_1) et construisons une sphère du rayon δ, ayant le point (x_1) pour centre. Désignons par (δ) la portion de (σ) découpée par cette sphère. Nous commençons en établissant l'identité

$$(27)\quad \int_{(S_2)} k_{m-1}(\sigma_2, 1)\left(\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma\right) d\sigma_2 = \int_{(\sigma-\delta)}\left(\int_{(S_2)} k_{m-1}(\sigma_2, 1) k_1(0, 2)\, d\sigma_2\right) d\sigma,$$

qui est la simple conséquence du théorème du § 12 (2).

Pour appliquer le théorème mentionné, il faut remplacer $x, y, (\Omega_x)$ (Ω_y), $v(\tau)$, $L(x, y)$ respectivement par x, x_2, $(\sigma - \delta)$, (S_2), $k_{m-1}(\sigma_2, 1)$, $k_1(0, 2)$.

Suivant le théorème, l'égalité (27) subsiste, si les intégrales

$$\int_{(S_2)} K_{m-1}(\sigma_2, 1)\,|k_1(0, 2)|\, d\sigma_2, \quad \int_{(\sigma-\delta)} |k_1(0, 2)|\, d\sigma$$

sont uniformément convergentes, le point (x) dans la première appartenant au domaine $(\sigma - \delta)$.

La convergence uniforme de la seconde intégrale pour les points (x_2), situés sur (S_2), est bien connue; on a

$$\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int_{(\sigma-\delta)} \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2}\, d\sigma$$

et on voit que c'est un potentiel de double couche.

Pour s'assurer que la première est aussi uniformément convergente, il suffit de remarquer que le point (x), étant sur $(\sigma - \delta)$, est en dehors de la sphère, ayant le centre en point (x_1) qui est mentionnée ci-dessus.

Si nous construisons une sphère ayant le rayon δ_1, qui ne surpasse pas $\frac{\delta}{2}$ et a son centre en point (x), on s'assure aisément que l'intégrale

$$\int_{(\delta_1)} K_{m-1}(\sigma_2, 1)\,|k_1(0, 2)|\, d\sigma_2$$

est infiniment petite si $(\delta_1) \to 0$. En effet, (σ_2) étant dans l'interieur de la sphère à rayon δ_1:

$$K_{m-1}(\sigma_2, 1) \leqq \frac{1}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)} \frac{|C(2, 1)|}{r_{21}^{2-(m-1)\lambda}}\, d\sigma_2 < \frac{B}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)} \frac{d\sigma_2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-(m-1)\lambda}} < \frac{B}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-(m-1)\lambda}}$$

car le point (x_2) étant dans (σ_2), r_{21} est plus grand que $\frac{\delta}{2}$. On a donc

$$\int_{(\delta_1)} K_{m-1}(\sigma_2, 1) k_1(0, 2)\, d\sigma_2 < \frac{B}{2\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-(m-1)\lambda}} \int_{(\delta_1)} \frac{|\cos(r_{02} N_0)|}{r_{20}}\, d\sigma_2$$

et l'intégrale est infiniment petite si $\delta_1 \to 0$, sa borne supérieure étant indépendante de la position du point (x) sur $(\sigma - \delta)$.

En appliquant les théorèmes du § 11 (2), on peut maintenant écrire en premier lieu

$$\int_{(S_2)} k_{m-1}(\sigma_2, 1) k_1(0, 2)\, d\sigma_2 = \int_{(S_2)} \left(\frac{1}{\sigma_2} \int_{(\sigma_2)} k_{m-1}(2, 1)\, d\sigma_2\right) k_1(0, 2)\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} k_{m-1}(2, 1) k_1(0, 2)\, d\sigma_2;$$

les points (x) et (x_1) ne coïncidant jamais, on peut enfermer le point (x) dans un domaine (δ_1) ne contenant pas le point (x_1): dans le domaine (δ_1) la fonction $k_{m-1}(2, 1)$ reste finie, dans le domaine restant — la fonction $k_1(0, 2)$; enfin l'intégrale à la droite est convergente et est égale à la fonction de la forme

$$\frac{C(0, 1)}{r_{01}^{2-m\lambda}}, \tag{28}$$

dans laquelle $C(0, 1)$ est bornée.

En second lieu on a

$$\int_{(S_2)} k_{m-1}(\sigma_2, 1) \left(\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma\right) d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} \left(\frac{1}{\sigma_2} \int_{(\sigma_2)} k_{m-1}(2, 1)\, d\sigma_2\right) \left(\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma\right) d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} k_{m-1}(2, 1) \left(\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma\right) d\sigma_2.$$

En effet, la fonction

$$\int_{(\sigma-\delta)} k_1(0, 2)\, d\sigma$$

est une fonction du point (x_2) qui est continue et bornée sur (S_2) et l'intégrale à la droite est convergente, car k_{m-1} (2, 1) est de la forme

$$\frac{C(2,1)}{r_{21}^{2-(m-1)\lambda}}.$$

A cause de tout cela, l'identité (27) est équivalente à l'identité

$$(29)\quad \int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\Big(\int\limits_{(\sigma-\delta)} k_1(0,2)\,d\sigma\Big)d\sigma_2 = \int\limits_{(\sigma-\delta)}\Big(\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\,k_1(0,2)\,d\sigma_2\Big)d\sigma.$$

Or, les intégrales

$$\int\limits_{(\delta)} k_1(0,2)\,d\sigma,\quad \int\limits_{(\delta)}\Big(\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\,k_1(0,2)\,d\sigma_2\Big)d\sigma$$

sont infiniment petites si $\delta \to 0$, car les integrales

$$\int\limits_{(S)} k_1(0,2)\,d\sigma,\quad \int\limits_{(S)}\Big(\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\,k_1(0,2)\,d\sigma_2\Big)d\sigma$$

sont uniformément convergentes, la fonction sous le signe de la seconde ayant la forme (28).

On conclut de là que l'identité (26) subsiste.

L'identité (26) a évidemment la forme

$$\sigma\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\,k_1(\sigma,2)\,d\sigma_2 = \int\limits_{(\sigma)} k_m(0,1)\,d\sigma.$$

Or, en appliquant le théorème du § 7 (2), on obtient, la fonction $k_1(\sigma, 2)$ étant une fonction continue et bornée sur (S),

$$\int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(2,1)\,k_1(\sigma,2)\,d\sigma_2 = \int\limits_{(S_2)}\Big(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)} k_{m-1}(2,1)\,d\sigma_2\Big)\,k_1(\sigma,2)\,d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_{(S_2)} k_{m-1}(\sigma_2,1)\,k_1(\sigma,2)\,d\sigma_2 = k_m(\sigma,1)$$

ce qui conduit à l'égalité (25).

On conclut de l'égalité (25) comme corollaire: si le nombre n satisfait à l'inégalité

$$(30) \qquad 2 - n\lambda < 0,$$

le noyau $k_n(\sigma, 1)$ est fini; dans ce cas, effectivement, la fonction $k_n(0, 1)$ est une fonction bornée.

8. Revenons maintenant aux considérations des §§ 4 et 5.

Les solutions des équations associées

$$(10) \qquad \mu(\sigma) = -\frac{\xi}{2\pi}\int_{(S_1)} k(\sigma, 1)\mu(\sigma_1)\,d\sigma_1 + u(\sigma)$$

$$(20) \qquad \varphi(x_1) = \frac{\xi}{2\pi}\int_{(S)} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{01}^2}\varphi(x)\,d\sigma + F(x_1)$$

vérifient les équations

$$(19) \qquad \mu(\sigma) = \xi^n\int_{(S_1)} k_n(\sigma, 1)\mu(\sigma_1)\,d\sigma_1 + s_n(\sigma)$$

$$(21) \qquad \varphi(x_1) = \xi^n\int_{(S)} k_n(\sigma, 1)\varphi(x)\,d\sigma + \bar{s}_n(x_1)$$

où

$$(19') \qquad s_n(\sigma) = u(\sigma) + \xi\int_{(S_1)} k_1(\sigma, 1)u(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \xi^2\int_{(S_1)} k_2(\sigma, 1)u(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \cdots + \xi^{n-1}\int_{(S_1)} k_{n-1}(\sigma, 1)u(\sigma_1)\,d\sigma_1$$

et la valeur de $\bar{s}_n(x_1)$ est donnée par la formule (21').

Si n satisfait à l'inégalité (30), les noyaux $k_n(\sigma,1)$ et $k_n(0, 1)$ sont finis. L'équation (21) n'est pas distincte de l'équation

$$(21'') \qquad \varphi(x_1) = \xi^n\int_{(S)} k_n(0, 1)\varphi(x)\,d\sigma + \bar{s}_n(x).$$

Suivant la théorie, exposée dans le chapitre 3, les équations (19) et son associée ont la même résolvante. Soit

$$(31) \qquad \Gamma(0, 1, \xi) = \frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)}$$

la résolvante de l'équation (21), $D(\xi)$ étant le déterminant de Fredholm attaché aux équations (19) et (21); les fonctions $D(\xi)$ de ξ et $D(1, 0, \xi)$ de ξ et des points (x_1) et (x) sont développables dans les séries suivant ξ, qui sont uniformément convergentes pour toutes les valeurs de ξ.

La résolvante $\Gamma(0, 1, \xi)$ étant la solution des équations

$$\Gamma(0, 1, \xi) = \xi^n \int_{(S_2)} k_n(0, 2)\Gamma(2, 1, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(0, 1),$$

$$\Gamma(0, 1, \xi) = \xi^n \int_{(S_2)} k_n(2, 1)\Gamma(0, 2, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(0, 1),$$

la fonction

$$\Gamma(\sigma, 1, \xi) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \Gamma(1, 0, \xi)\, d\sigma = \frac{D(\sigma, 1, \xi)}{D(\xi)} \tag{32}$$

où

$$D(\sigma, 1, \xi) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} D(0, 1, \xi)\, d\sigma, \tag{31'}$$

verifie les équations:

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma(\sigma, 1, \xi) &= \xi^n \int_{(S_2)} k_n(\sigma, 2)\Gamma(2, 1, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(\sigma, 1) = \\ &= \xi^n \int_{(S_2)} k_n(\sigma, 2)\Gamma(\sigma_2, 1, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(\sigma, 1) \\ \Gamma(\sigma, 1, \xi) &= \xi^n \int_{(S_2)} k_n(2, 1)\Gamma(\sigma, 2, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(\sigma, 1) = \\ &= \xi^n \int_{(S_2)} k_n(\sigma_2, 1)\Gamma(\sigma, 2, \xi)\, d\sigma_2 + k_n(\sigma, 1) \end{aligned}\right. \tag{33}$$

c'est-à-dire, suivant les théorème du § 5 (3), elle est la résolvante commune de l'équation (19) et son associée.

Il suit de là que

$$\mu(\sigma) = s_n(\sigma) + \xi^n \int_{(S_1)} \Gamma(\sigma, 1, \xi)\, s_n(\sigma_1)\, d\sigma_1 = \frac{D_1(\sigma, \xi)}{D_1(\xi)}, \tag{34}$$

$D_1(\sigma, \xi)$ et $D_1(\xi)$ étant les fonctions entières de ξ; nous supposons que la fraction (34) est réduite.

Désignons par Σ_m et $R_m(0, 1)$ la somme des m premiers termes et le terme complémentaire de la série $D(0, 1, \xi)$:

$$D(0, 1, \xi) = \Sigma_m + R_m(0, 1).$$

Désignons par $\overline{R}_m(0, 1)$ la somme des valeurs absolues des termes de $R_m(0, 1)$. En supposant que

(35) $$|\xi| < l, \quad l > 1$$

nous avons, la série $D(0, 1, \xi)$ étant uniformément et absolument convergente sur (S) et (S_1),

$$|R_m(0, 1)| < \overline{R}_m(0, 1) < \varepsilon,$$

si

$$m \geqq N,$$

le nombre N étant indépendant de la position des points (x) et (x_1). Il suit de là que pour les valeurs de ξ, qui vérifient l'inégalité (35):

$$D(\sigma, 1, \xi) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \Sigma_m \, d\sigma + R_m(\sigma, 1), \quad R_m(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} R_m(0, 1)\, d\sigma,$$

où

$$|R_m(\sigma, 1)| < \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \overline{R}_m(0, 1)\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = \varepsilon,$$

si

$$m \geqq N.$$

On conclut de là, que $\sigma_1, \ldots \sigma_t$ étant les portions de (σ), on a

$$\Sigma |R_m(\sigma_i, 1)| \, \sigma_i < \varepsilon \Sigma \sigma_i = \varepsilon\sigma$$

et que

$$\overline{\overline{R}}_m(\sigma, 1) < \varepsilon$$

$\overline{\overline{R}}_m(\sigma, 1)$ étant la variation moyenne de $R_m(\sigma, 1)$.

Remarquons encore que pour la valeur de ξ, vérifiant l'inégalité (35), la fonction $D(0, 1, \xi)$ ne surpasse pas en valeur absolue un nombre fixe.

Il suit de là que la même propriété appartient à la fonction $D(\sigma, 1, \xi)$, car on a:

$$|D(\sigma, 1, \xi)| < \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} C d\sigma = C.$$

Envisageons maintenant la fonction

$$(36) \qquad \int\limits_{(S_1)} D(\sigma, 1, \xi)\, s_n(\sigma_1)\, d\sigma_1.$$

En posant temporellement

$$D(\sigma, 1, \xi) = A_0 + A_1 \xi + \cdots + A_{m-1} \xi^{m-1} + \cdots$$
$$s_n(\sigma) = a_0 + \xi a_1 + \cdots + a_{n-1} \xi^{n-1}$$

on trouve sans peine, que le terme complémentaire de la série (36) ne surpasse pas en valeur absolue

$$\int\limits_{(S_1)} \bar{a}_0 \bar{R}_m d\sigma_1 + \int\limits_{(S_1)} \bar{a}_1 \bar{R}_{m-1} d\sigma_1 + \cdots + \int\limits_{(S_1)} \bar{a}_{n-1} \bar{R}_{m-n-1} d\sigma_1 < \varepsilon \bar{s}_n(S) S,$$

si $m - n > N$, en désignant par $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1 \ldots$ les variations moyennes des a_0, $a_1 l_1, \ldots, a_{n-1} l^{n-1}$ et par $\bar{s}_n$ leur somme.

Il suit de là, que la série (36) est uniformément convergente comme fonction de (σ).

Supposons, que l_1 surpasse $2l$ et que pour $|\xi|$ ne surpassant pas l_1 la fonction $D(\sigma, 1, \xi)$ est en valeur absolue plus petite que C. Supposons que le nombre α est une racine commune de $D(\sigma, 1, \xi)$ et de $D(\xi)$ et que $|\alpha|$ ne surpasse pas l.

On s'assure aisément que la série obtenue en divisant $D(\sigma, 1, \xi)$ par $\alpha - \xi$ est uniformément convergente dans l'intervalle (35) comme fonction de (σ) et du point (x_1). Pour s'en convaincre, il suffit d'observer, que

$$|D(\sigma, 1, \alpha)| < \frac{C}{1 - \frac{|\alpha|}{l_1}}, \quad \left|\frac{d^k D(\sigma, 1, \xi)}{k!\, d\xi^k}\right|_{\xi=\alpha} < \frac{C}{l_1^k \left(1 - \frac{|\alpha|}{l_1}\right)^{k+1}}$$

et qu'en transformant le développement de

$$\frac{D(\sigma, 1, \xi)}{\xi - \alpha}, \quad D(\sigma, 1, \alpha) = 0,$$

suivant les puissances de $\xi - \alpha$, en une série procédant suivant les puissances de ξ, on obtient que le terme à l'indice m de cette série ne surpasse pas

$$C\left\{\frac{1}{l_1^{m+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|\alpha|}{l_1}\right)^{m+2}} + \frac{m+1}{1 . l_1^{m+2}} \cdot \frac{|\alpha|}{\left(1 - \frac{|\alpha|}{l_1}\right)^{m+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m+1)(m+2)}{1 . 2 . l_1^{m+3}} \cdot \frac{|\alpha|^2}{\left(1 - \frac{|\alpha|}{l_1}\right)^{m+4}} + \cdots \right\} |\xi|^m$$

c'est-à-dire ne surpasse pas

$$C \frac{|\xi|^m}{l_1^{m+1}\left(1 - \frac{|\alpha|}{l_1}\right)\left(1 - \frac{2|\alpha|}{l_1}\right)^{m+1}},$$

d'où suit qu'il est borné dans l'intervalle (35) pour chaque choix de (σ) et de (x_1) sur (S_1).

Or, le nombre des racines de la fonction $D(\xi)$, dont les modules ne surpassent pas l, est limité et les opérations restantes, attachées à la réduction de la fraction (34), équivalent à la multiplication de la série (36) par une série à termes constants, ayant un rayon de convergence supérieur à l.

Il suit de là que $D_1(\sigma, \xi)$ est une série uniformément convergente comme fonction de (σ).

Soit q le plus petit module des racines de $D_1(\xi)$. La fraction (34) est développable dans une série suivant les puissances de ξ, ayant le rayon de convergence égal à q. Comme on obtient cette série en multipliant $D_1(\sigma, \xi)$ par une série à termes constants, on en conclut que pour

$$|\xi| < q_1 < q$$

le terme complémentaire de la série (11) est en valeur absolue moindre que ε, dès que son indice surpasse un nombre N, qui est indépendant du choix de (σ).

9. Les propriétés de la fonction méromorphe

$$\frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)} \tag{31}$$

sont assez connues. Entre autres, la fonction (31) n'a pas des pôles dont les modules sont plus petits que l'unité. Si le module du pôle est égal à l'unité, on a $\xi = 1$ dans le cas ordinaire et dans le cas (E); dans le cas (I) les pôles de la fonction (31) peuvent être égaux à 1 et à -1; les pôles mentionnés sont les pôles simples.

Rappelons-nous brièvement la démonstration de ces assertions. La fonction (31) étant la résolvante de l'équation

$$\varphi(x_1) = \xi^n \int_{(S)} k_n(0, 1)\, \varphi(x)\, d\sigma + F(x_1), \tag{21}$$

elle est égale à la résolvante de l'équation

$$\psi(x) = \xi^n \int_{(S_1)} k_n(0, 1)\, \psi(x_1)\, d\sigma_1 + f(x). \tag{35}$$

Il suit de là que la solution de l'équation

$$\psi(x) = \xi \int_{(S_1)} k_1(0, 1)\, \psi(x_1)\, d\sigma_1 + f(x) = \tag{35'}$$

$$= -\frac{\xi}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} \psi(x_1)\, d\sigma_1 + f(x)$$

est égale à

$$\psi(x) = s_n(x) + \xi^n \int_{(S_1)} s_n(x_1) \frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)} d\sigma_1 = \frac{D_2(0, \xi)}{D_2(\xi)}, \tag{37}$$

où $s_n(x)$ est la somme de n premiers termes dans le développement formel de la fonction $\psi(x)$ suivant les puissances de ξ.

Si l'on pose

$$W = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\psi(x_1)\, d\sigma_1}{r_{10}}. \tag{38}$$

on trouve

$$\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = -\xi\left(\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn}\right) - 2f$$

d'où l'on conclut, que tous les pôles des fonctions méromorphes W et ψ sont réels et simples, que ces fonctions n'ont pas des pôles, dont les modules sont plus petits que l'unité et que le nombre $\xi = -1$ n'est pas leur pôle dans le cas ordinaire et dans le cas (E).

Si $\psi(x)$ est la solution de l'équation $(35')$ pour $\xi = 1$ et $f(x) = 0$, le potentiel W est constant dans $(D^{(i)})$, ayant éventuellement dans le cas (E) les valeurs différentes dans les domaines limités par les différentes surfaces $(S^{(l)})$.

Si dans le cas (I) $\psi(x)$ est la solution de l'équation $(35')$ pour $\xi = -1$ et $f(x) = 0$, le potentiel W est constant dans $(D^{(e)})$, étant égal à zéro en dehors de $(S^{(0)})$ et prenant éventuellement les valeurs différentes dans les domaines limités par les surfaces $(S^{(l)})$, $l > 0$.

L'étude le l'équation

$$D_2(0, \xi) = \xi \int\limits_{(S_1)} k_1(0, 1) D_2(1, \xi)\, d\sigma_1 + f(x) D_2(\xi), \tag{39}$$

qu'on obtient en substituant dans $(35')$ à la place de $\psi(x)$ sa valeur (37), conduit facilement aux résultats: pour que le nombre $\xi = 1$ ne soit pas le pôle de la fraction (37), il faut et il suffit dans le cas ordinaire et dans le cas (I) que

$$\int\limits_{(S)} f(x)\, d\sigma = 0; \tag{40}$$

dans le cas (E) pour cela k conditions doivent être satisfaites

$$\int\limits_{(S^{(l)})} f(x)\, d\sigma = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k \tag{40'}$$

Pour que le nombre $\xi = -1$ ne soit pas le pôle de la fraction (37) dans le cas (I), il faut et il suffit que les k conditions

$$\int\limits_{(S^{(l)})} f(x)\, d\sigma = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k, \tag{41}$$

soient satisfaites, $(S^{(l)})$ désignant une frontière intérieure. Soit:

$$\psi(x) = \rho_0 + \xi\rho_1 + \xi^2\rho_2 + \cdots + \xi^n\rho_n + \cdots \tag{42}$$

la solution formelle de l'équation (35'). On a

$$\rho_0 = f, \quad \rho_n(x) = \int_{(S_1)} k_1(0,\ 1)\,\rho_{n-1}(1)\,d\sigma_1 = \int_{(S_1)} k_n(0,\ 1) f(x)\,d\sigma_1 .$$

Dans le cas ordinaire et dans le cas (E) le rayon de convergence de la série

$$(1-\xi)\psi = \rho_0 + \xi(\rho_1 - \rho_0) + \xi^2(\rho_2 - \rho_1) + \cdots + \xi^n(\rho_n - \rho_{n-1}) + \cdots$$

est plus grand que l'unité et on a

$$|\rho_n - \rho_{n-1}| < a\tau^n, \quad n > N,$$

τ étant un certain nombre plus petit que l'unité.

On conclut de là que ρ_n a une limite et l'égalité

$$\rho_n(x) = \int_{(S_1)} k_1(0,\ 1)\,\rho_{n-1}(1)\,d\sigma_1 \tag{43}$$

conduit à la conclusion, que cette limite ρ est la solution de l'équation (35') pour $\xi = 1$ et $f(x) = 0$. La limite ρ est égale à zéro, quand les conditions (40), respectivement (40'), sont satisfaites et seulement dans ce cas.

Le changement de $f(x)$ change ρ par un facteur constant dans le cas ordinaire; dans le cas (E) les valeurs de ρ dépendent du choix de $f(x)$ et ρ acquiert k valeurs linéairement indépendantes. On peut les obtenir en posant que

$$\int_{(S^{(l)})} f_\lambda(x)\,d\sigma = 0, \ \text{si} \ l \neq \lambda, \ \int_{(S^{(\lambda)})} f_\lambda(x)\,d\sigma = 1, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k.$$

Dans le cas (I) le rayon de convergence de la série

$$(1-\xi^2)\psi = \rho_0 + \xi\rho_1 + \xi^2(\rho_2 - \rho_0) + \xi^3(\rho_3 - \rho_1) + \cdots$$

est plus grand que l'unité et on a

$$|\rho_n - \rho_{n-2}| < a\tau^n, \quad n \geqq N,$$

τ étant un nombre déterminé plus petit que l'unité. On conclut de là que ρ_{2m} et ρ_{2m-1} ont les limites; si A et B sont ces limites, on trouve, en utilisant (43) que

$$A = \int_{(S_1)} k_1(0, 1)\, B d\sigma, \quad B = \int_{(S_1)} k_1(0, 1)\, A d\sigma_1.$$

Il suit de là, que $A + B$ est la solution de l'équation (35′) pour $\xi = 1$ et $f(x) = 0$ et $A - B$ la solution de la même équation pour $\xi = -1$. On a $A = B$, si la condition (40) est satisfaite; on a $A = -B$, si les conditions (41) sont vérifiées.

Le changement de $f(x)$ change $A + B$ par un facteur constant; $A - B$ acquiert k valeurs linéairement indépendantes; on les obtient en posant

$$\int_{(S^{(l)})} f_\lambda(x)\, d\sigma = 0, \quad l \neq \lambda, \quad \int_{(S^{(\lambda)})} f_\lambda(x) d\sigma = 1, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k$$

La fonction (31) étant la résolvante des équations (21) et (35), l'équation

$$D(0, 1, \xi) = \xi^n \int_{(S_2)} k_n(2, 0)\, D(2, 1, \xi)\, d\sigma_2 + D(\xi)\, k_n(1, 0)$$

est vérifiée. On en conclut, que ξ_0 étant la racine de $D(\xi)$, on a

$$D(0, 1, \xi_0) = \xi_0^n \int_{(S_2)} k_n(2, 0)\, D(2, 1, \xi_0)\, d\sigma_2 =$$

$$= \xi_0^{ns} \int_{(S_2)} k_{ns}(2, 0)\, D(2, 1, \xi_0)\, d\sigma_2;$$

la dernière égalité prend la forme

(44) $$D(0, 1, \xi_0) = \xi_0^{ns} \rho_{ns},$$

si en formant ρ_n on prend pour $f(x)$ la fonction $D(0, 1, \xi_0)$.

On conclut de là que ξ_0 ne peut pas avoir le module plus petit que l'unité ni être imaginaire, ayant le module égal à l'unité; dans le cas ordinaire et dans le cas (E) ξ_0 n'est pas égale à (-1), ρ_{ns} ayant une limite déterminée.

La supposition que l'égalité $\xi = 1$, respectivement dans le cas (I) $\xi = -1$, est une racine multiple de $D(\xi)$ conduit à la conclusion que les fonctions $D(0, 1, 1)$, respectivement dans le cas (I) $D(0, 1, -1)$, satisfont aux conditions (40) ou (40′), respectivement aux conditions (41); l'égalité (44) donne de nouveau $D(0, 1, 1) = 0$ ou $D(0, 1, -1) = 0$, ce qui est impossible, la fraction (31) étant réduite.

10. Comme la fonction

$$\frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)} \tag{31}$$

n'a pas des pôles, ayant le module moindre que l'unité et n'a pas des pôles à module égal à l'unité, les nombres $\xi = 1$ et, dans le cas (I), $\xi = -1$ faisant exception, ces pôles étant simples, la même propriété appartient à la fonction

$$\frac{D(\sigma, 1, \xi)}{D(\xi)} = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)} d\sigma \tag{31'}$$

et à la fonction

$$\frac{D_1(\sigma, \xi)}{D_1(\xi)}. \tag{34}$$

On obtient, effectivement, la fonction (34) en réduisant la fraction de la forme

$$\frac{\overline{D}(\sigma, \xi)}{D(\xi)}.$$

Comme la fonction (34) est la solution de l'équation (10), nous avons

$$D_1(\sigma, \xi) = \xi \int_{(S_1)} k_1(\sigma, 1) D_1(\sigma_1, \xi) d\sigma_1 + D_1(\xi) u(\sigma). \tag{43}$$

En intégrant l'égalité (43) sur (S), on trouve

$$D_1(S, \xi) S = \xi D_1(S, \xi) S + D_1(\xi) u(S) S,$$

ayant remarqué que

$$\int\limits_{(S)}\Big(\int\limits_{(S_1)} k_1(\sigma, 1)\, D_1(\sigma_1, \xi)\, d\sigma_1\Big) d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S)}\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^{2}}\, d\sigma\Big) d\sigma\Big) d\sigma_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^{2}}\, d\sigma\Big) d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^{2}}\, d\sigma\Big) d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} D_1(\sigma_1, \xi)\, d\sigma_1 = D_1(S_1, \xi)\, S_1 .$$

Il suit de là que

$$D_1(S, \xi) = \frac{D_1(\xi)}{1-\xi}\, u(S). \tag{44}$$

Comme $D_1(S, \xi)$ est une fonction entière de ξ, l'égalité (44) montre que si $\xi = 1$ n'est pas la raçine de $D_1(\xi)$, on a

$$u(S) = 0. \tag{45}$$

Dans le cas (E) on peut substituer à la place de l'égalité (44) les k égalités

$$D_1(S^{(l)}, \xi) = \frac{D(\xi)}{1-\xi}\, u(S^{(l)}), \qquad l=1, 2, \dots k; \tag{44'}$$

dans ce cas, effectivement,

$$\int\limits_{(S^{(l)})}\Big(\int\limits_{(S_1)} k_1(\sigma, 1)\, D_1(\sigma_1, \xi)\, d\sigma_1\Big) d\sigma = \int\limits_{(S^{(l)})}\Big(\sum_{i=1}^{i=k}\int\limits_{(S_1^{(i)})} k_1(\sigma, 1)\, D_1(\sigma_1, \xi)\, d\sigma_1\Big) d\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=k}\int\limits_{(S_1^{(i)})} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S^{(l)})} k_1(\sigma, 1)\, d\sigma\Big) d\sigma_1 = \int\limits_{(S_1^{(l)})} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S^{(l)})} k_1(\sigma, 1)\, d\sigma\Big) d\sigma_1 =$$

$$= D_1(S^{(l)})\, S^{(l)},$$

car le potentiel de double couche

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma$$

est égal à zéro, si le point (x_1), qui est sur (S_1), n'est pas sur $(S_1^{(l)})$. L'égalité (44') montre, que dans le cas (E) il faut remplacer la condition (45) par les k conditions

$$(45') \qquad u(S^{(l)}) = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k.$$

Les conditions (45) et (45') sont non seulement nécessaires pour que la fonction (34) soit entière dans le voisinage du point $\xi = 1$, mais elles sont aussi suffisantes.

Supposons que les conditions (45) ou (45') soient satisfaites et que, quand même, $\xi = 1$ soit une racine de $D_1(\xi)$. L'égalité (43) donne dans ce cas en premier lieu, que

$$(43') \qquad D_1(\sigma, 1) = \int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2) D_1(\sigma_2, 1) d\sigma_2.$$

En appliquant à (43') le procédé d'itération nous obtenons

$$(46) \qquad D_1(\sigma, 1) = \int_{(S_2)} k_n(\sigma, 2) D_1(\sigma_2, 1) d\sigma_2.$$

Si n est assez grand, le noyau $k_n(\sigma, 1)$ est fini, étant égal à la moyenne du noyau de l'équation correspondante; on a

$$k_n(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} k_n(0, 1) d\sigma,$$

où $k_n(0, 1)$ est borné et même continu comme fonction du point (x_1). En appliquant à la partie droite de (46) le théorème du § 8 (2), nous pouvons écrire que

$$D_1(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \left(\int_{(S_2)} k_n(0, 2) D_1(\sigma_2, 1) d\sigma_2 \right) d\sigma;$$

c'est-à-dire que $D_1(\sigma, 1)$ est égale à la moyenne de la fonction

$$\Phi(x) = \int_{(S_2)} k_n(0, 2) D_1(\sigma_2, 1) d\sigma_2$$

qui est une fonction continue du point (x); on a, en effet,

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| < \int_{(S_2)} |k_n(x', 2) - k_n(x'', 2)| \overline{D}_1(\sigma_2, 1) d\sigma_2 < \varepsilon \overline{D}_1(S, 1) S,$$

en désignant par $\overline{D}_1(\sigma, 1)$ la variation moyenne de $D_1(\sigma, 1)$, car suivant une remarque dans le § 6, si $|x' - x''| < \eta$, on a

$$|k_n(x', 1) - k_n(x'', 1)| < \varepsilon,$$

le nombre η ne dépendant pas de la position du point (x_1).

En substituant la valeur trouvée de $D_1(\sigma, 1)$ dans (43') et en appliquant les théorèmes du § 11 (2) et du § 12 (2), nous obtenons:

$$\frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \Phi(x) d\sigma = \int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)} \Phi(x_2) d\sigma_2\right) d\sigma_2 = \int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2) \Phi(x_2) d\sigma_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma}\int_{(S_2)}\left(\int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma\right) \Phi(x_2) d\sigma_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{(\sigma)}\left(\int_{(S_2)} \Phi(x_2) \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma_2\right) d\sigma;$$

l'application du théorème du § 12 (2) est maintenant légitime, car les intégrales

$$\int_{(S_1)} |\Phi(x_1)| \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad \int_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma$$

sont convergentes.

Nous avons donc pour chaque portion (σ):

$$\int_{(\sigma)}\left(\Phi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{(S_2)} \Phi(x_2) \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma_2\right) d\sigma = 0.$$

Comme la fonction sous le signe de la dernière intégrale est continue, il suit de là que

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)} \Phi(x_2)\frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2}d\sigma_2;$$

c'est-à-dire que $\Phi(x)$ est une solution de l'équation homogène (35'). Or, si la condition (45), respectivement les conditions (45'), sont satisfaites, on a

$$D_1(S, 1) = 0, \text{ resp. } D_1(S^{(l)}, 1) = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k,$$

c'est-à-dire

$$\int\limits_{(S)} \Phi(x)\,d\sigma = 0, \text{ resp. } \int\limits_{(S^{(l)})} \Phi(x)d\sigma = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k.$$

Comme on peut restituer $\Phi(x)$ comme la limite de ρ_n (dans le cas ordinaire et dans le cas (E)) et comme limite de $\frac{1}{2}(\rho_{2m} + \rho_{2m-1})$ (dans le cas (I)) en posant $\rho_0 = \Phi(x)$, on conclut de là que $\Phi(x) = 0$, d'où suit $D_1(\sigma, 1) = 0$, ce qui est impossible, la fraction (34) étant réduite et $\xi = 1$ étant le pôle.

Il suit de là que la supposition, que $\xi = 1$ est la racine de $D_1(\xi)$, est en contradiction avec la supposition que les conditions (45), respectivement (45'), sont satisfaites.

En répétant presque textuellement les raisonnements de ce paragraphe, on démontre que dans le cas (I) les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\xi = -1$ ne soit pas le pôle de la fonction (34), sont

(47) $$U(S^{(l)}) = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k.$$

L'intégration sur $(S^{(l)})$ de l'égalité (43) donne cette fois

$$D_1(S_1^{(l)}, \xi) = \frac{D_1(\xi)}{1+\xi}u(S^{(l)}), \qquad l=1, 2, \ldots k;$$

en effet

$$\int\limits_{(S^{(l)})}\Big(\int\limits_{(S_1)} k_1(\sigma, 1)D_1(\sigma_1, \xi)\,d\sigma_1\Big)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} D_1(\sigma_1, \xi)\Big(\int\limits_{(S^{(l)})}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}d\sigma\Big)d\sigma_1 =$$

$$= -\int\limits_{(S_1^{(l)})} D_1(\sigma_1, \xi)\,d\sigma_1$$

car

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos (r_{0i}\, N_0)}{r_{10}^{\;2}} d\sigma$$

est différente de zéro seulement quand le point (x_1) est sur $(S^{(l)})$ et est égale à -2π dans ce cas, la normale à $(S^{(l)})$ étant dirigée vers l'intérieur du domaine, limité par $(S^{(l)})$. L'application du procédé d'itération conduit de nouveau à la conclusion, que $D_1(\sigma, -1)$ est la moyenne d'une fonction continue qui est la solution de l'équation homogène (35′) pour $\xi = -1$ et qui répond aux conditions (41).

11. Les résultats obtenus par nous nous montrent que nous sommes en état de résoudre le problème posé de Neumann dans le cas, quand la fonction donnée $u(\sigma)$ est continue sur (S).

Les problèmes intérieurs. Dans le cas ordinaire et dans le cas (E) les conditions

$$u(S) = 0, \text{ resp. } u(S^{(l)}) = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k,$$

étant satisfaites, $\xi = 1$ n'est pas le pôle de la fonction $\mu(\sigma)$ et cette fonction n'ayant non plus pour pôle le nombre $\xi = -1$, le rayon de convergence de la série

$$(11) \qquad \mu(\sigma) = u(\sigma) + \xi\mu_1(\sigma) + \xi^2 \mu_2(\sigma) + \cdots$$

surpasse l'unité.

On a donc pour $\xi = 1$:

$$(48) \qquad \mu(\sigma) = u(\sigma) + \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) + \cdots$$

et la somme de cette série donne la solution de l'équation (10) pour $\xi = 1$. Dans le cas (I), sous la condition

$$u(S) = 0$$

le nombre $\xi = 1$ n'est pas le pôle de la fonction (11), mais $\xi = -1$ est éventuellement son pôle. Le rayon de convergence de la série

$$(1 + \xi)\mu(\sigma) = u(\sigma) + \xi(\mu_1(\sigma) + u(\sigma)) + \xi^2(\mu_2(\sigma) + \mu_1(\sigma)) + \cdots$$

surpasse donc l'unité et la solution de l'équation (10) pour $\xi = 1$ est donnée par la série

$$(48') \quad \mu(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{u(\sigma) + (\mu_1(\sigma) + u(\sigma)) + (\mu_2(\sigma) + \mu_1(\sigma)) + \cdots\right\}.$$

Les problèmes extérieurs. Dans le cas ordinaire et dans le cas (E) le nombre $\xi = 1$ étant éventuellement le pôle de la fonction (11), le rayon de convergence de la série

$$(1 - \xi)\mu(\sigma) = u(\sigma) + \xi(\mu_1(\sigma) - u(\sigma)) + \xi^2(\mu_2(\sigma) - \mu_1(\sigma)) + \cdots$$

est supérieur que l'unité; la solution de l'équation (10) pour $\xi = -1$ est donc donnée par la série

$$(49) \quad \mu(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{u(\sigma) - (\mu_1(\sigma) - u(\sigma)) + (\mu_2(\sigma) - \mu_1(\sigma)) - (\mu_3(\sigma) - \mu_2(\sigma)) + \cdots\right\}.$$

Dans le cas (I) sous les conditions

$$u(S^{(l)}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots k,$$

$\xi = -1$ n'est pas le pôle de la fonction $\mu(\sigma)$ et la solution de l'équation (10) est donnée par la même serie (49).

Or, nous avons démontré dans le § 8, que si $r_m(\sigma)$ est le terme complémentaire de la série (11), on a

$$|r_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

N étant un nombre indépendant de (σ); les termes de la série (11) à l'indice supérieur à N sont, par conséquent, en valeur absolue pour chaque choix de (σ) moindre que 2ε. Il suit de là que les termes complémentaires des séries qui donnent $(1 + \xi)\,\mu(\sigma)$ et $(1 - \xi)\,\mu(\sigma)$, jouissent de la même propriété.

Soit donc $\rho_m(\sigma)$ le terme complémentaire d'une des séries (48), (48'), (49) et $s_m(\sigma)$ la somme de ces m premiers termes. On a

$$|\rho_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m \geqq N,$$

où N est indépendant de (σ).

Soit (σ_0) un domaine arbitraire, soit $(\underline{\sigma})$ un domaine contenu dans (σ_0). On a par suite

$$|\mu(\sigma_0) - \mu(\underline{\sigma})| \leqq |s_m(\sigma_0) - s_m(\underline{\sigma})| + 2\varepsilon,$$

d'où suit que la fonction $\mu(\sigma)$ est continue, si $s_m(\sigma)$ est continue et même absolument, si $s_m(\sigma)$ est absolument continue.

Or, les fonctions $\mu_k(\sigma)$ étant absolument continue, $s_n(\sigma)$ est continue, respectivement absolument continue, si $u(\sigma)$ est continue, respectivement absolument continue.

Donc, si la fonction $u(\sigma)$ est continue, la fonction $\mu(\sigma)$ l'est aussi. Formons maintenant le potentiel

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1)}{r_{10}} d\sigma_1. \tag{50}$$

Supposons que $u(\sigma)$ est continue. La densité $\mu(\sigma)$ du potentiel étant continue, on a

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma^{(i)}(V) + \sigma^{(e)}(V) = 2\sigma(V) = \frac{2}{2\pi} \int_{(S_1)} k(\sigma, 1)\, \mu(\sigma_1)\, d\sigma_1 = \\ & \qquad = 2\xi u(\sigma) - 2\xi\mu(\sigma), \quad \xi = \pm 1 \\ & \qquad \sigma^{(i)}(V) - \sigma^{(e)}(V) = 2\mu(\sigma) \end{aligned} \right. \tag{51}$$

d'où il suit:

$$\text{si } \xi = 1, \quad \sigma^{(i)}(V) = u(\sigma),$$
$$\text{si } \xi = -1, \quad \sigma^{(e)}(V) = -u(\sigma).$$

Le potentiel (50) résout donc le problème (B).

Les séries (48), (48') et (49) étant uniformément convergentes sur (S), on peut intégrer terme à terme la série, qu'on obtient en substituant dans (50) à la place de $\mu(\sigma)$ la série, obtenue pour elle. Ainsi nous trouvons que les solutions des problèmes intérieurs sont données par les séries:

dans le cas ordinaire et dans le cas (E):

$$V = V_1 + V_2 + \cdots,$$

dans le cas (I):

$$V = \frac{1}{2}\left\{V_1 + (V_2 + V_1) + (V_3 + V_2) + \cdots\right\}$$

où

$$V_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \sigma_1(V_{k-1})\frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \quad V_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} u(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Les solutions des problèmes extérieurs sont données dans tous les cas par la série

$$V = -\frac{1}{2}\left\{V_1 - (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) - \cdots\right\},$$

les potentiels V_k ayant la même valeur que ci-dessus.

Remarque. Si la densité $u(\sigma)$ n'est pas continue, les formules de ce paragraphe donnent la solution du problème (B) relatif, qui est mentionné dans la remarque du § 2.

Comme V est une fonction harmonique, il suit de là que nous avons obtenu dans le cas, quand $u(\sigma)$ est continu, une solution du problème (A).

On obtient d'autres solutions du problème intérieur (A) en ajoutant à V dans le cas ordinaire et dans le cas (I) une constante arbitraire et dans le cas (E) une fonction, définie dans $(D^{(i)})$, qui est égale à une constante dans chaque domaine, limité par une surface $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots k$. Cela revient à ajouter à $\mu(\sigma)$ une solution de l'équation homogène

$$\mu(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma,$$

qui est égale, suivant les considérations du § 10, à la moyenne de la solution de l'équation

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \Phi(x_1)\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1.$$

Suivant la remarque du § 9, le potentiel de simple couche ayant la densité égale à cette solution est, effectivement, constant dans $(D^{(i)})$.

De même, dans le cas (I) on obtient une nouvelle solution du problème extérieur en ajoutant au potentiel trouvé une fonction, qui est égale à zéro en dehors de $(S^{(0)})$ et est égale à une constante dans chaque domaine, limité par une des surfaces intérieures $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots k$, ce qui revient à ajouter à la densité trouvée $\mu(\sigma)$ la solution de l'équation homogène

$$\mu(\sigma) = + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 .$$

12. Supposons maintenant que $u(\sigma)$ est absolument continue. Supposons que $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction donnée $f(x)$, qui est sommable dans le sens de M. Lebesgue.

Supposons que la fonction $f(x)$ est continue au point (x_0); quel que soit ε, on peut construire une sphère du rayon r_ε, ayant le centre dans (x_0), telle que

$$(52) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

si (x) est sur (r_ε), (r_ε) étant la portion découpée de (S) par cette sphère. Pour une portion (r_0), correspondante à une sphère du rayon r_0 on a

$$|f(x) - f(x_0)| < 1.$$

Il suit de là, que la fonction $f(x)$ est bornée sur (r_0).

Remarquons encore, que M_ε et m_ε étant les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$ sur (r_ε), on a

$$(52') \; f(x_0) \leqq M_\varepsilon < f(x_0) + 2\varepsilon, \quad f(x_0) - 2\varepsilon < m_\varepsilon \leqq f(x_0), \quad M_\varepsilon - m_\varepsilon < 4\varepsilon.$$

Il est aisé de démontrer que les fonctions

$$(53) \qquad \mu_1(\sigma), \; \mu_2(\sigma), \; \ldots, \; \mu_n(\sigma),$$

n étant quelconque, sont les fonctions moyennes des fonctions sommables sur (S), qui sont toutes continues dans une portion (σ'), contenue dans l'intérieur de (r_0).

En évaluant $\mu_1(\sigma)$ nous avons:

$$\mu_1(\sigma) = \int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1) k_1(\sigma, 1) d\sigma_1 = \int\limits_{(S_1 - r_0)} u(\sigma_1) k_1(\sigma, 1) d\sigma_1 + \int\limits_{(r_0)} f(x_1) k_1(\sigma, 1) d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1 - r_0)} u(\sigma_1) k_1(\sigma, 1) d\sigma_1 - \frac{1}{2\pi\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \Big(\int\limits_{(r_0)} f(x_1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \Big) d\sigma;$$

en effet, $f(x_1)$ étant bornée dans (r_0), les intégrales

$$\int\limits_{(r_0)} U(\sigma_1) \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad \int\limits_{(r_0)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma$$

sont convergentes et le théorème du § 12 (2) est applicable.

Si (σ') est dans l'intérieur de (r_0), on a de même

$$\int\limits_{(S_1 - r_0)} u(\sigma_1) k_1(\sigma', 1) d\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi\sigma'} \int\limits_{(\sigma')} \Big(\int\limits_{(S_1 - r_0)} u(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \Big) d\sigma,$$

l'intégrale

$$\int\limits_{(S_1 - r_0)} U(\sigma_1) \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

ayant un sens pour les points (x) qui appartiennent à (σ'), $\frac{1}{r_{10}^2}$ étant dans ce cas bornée.

Nous avons donc que dans la portion de surface (σ'), contenant le point (x_0), $\mu(\sigma)$ est la moyenne de la fonction

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_1 - r_0)} u(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(r_0)} f(x_1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma,$$

qui est continue dans (σ') et bornée dans une portion (r_0') de (r_0).

On démontre de même pas à pas notre assertion pour les fonctions

$$\mu_2(\sigma), \ \mu_3(\sigma), \ \ldots, \ \mu_n(\sigma).$$

La fonction $\mu(\sigma)$ est la somme d'une série, dans laquelle le terme complémentaire $r_m(\sigma)$ répond à la condition

$$(54_1) \qquad |r_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

le nombre N étant indépendant du choix de (σ); on peut prendre pour le premier terme de cette série $u(\sigma)$, les autres termes étant les fonctions linéaires des fonctions (53).

Désignons par $\Sigma_m(\sigma)$ la somme des m premiers termes de la série qui donne $\mu(\sigma)$. Tous les termes de $\Sigma_m(\sigma)$. à partir du second, sont les moyennes des fonctions continues dans une portion (σ^*), contenant le point (x_0). Si (σ) appartient à (σ^*), on a

$$\Sigma_m(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\,d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \vartheta(x)\,d\sigma,$$

la fonction $\vartheta(x)$ étant continue dans (σ^*). La fonction $\Sigma_m(\sigma)$ est donc égale dans (σ^*) à la moyenne de la fonction

$$\varphi(x) = f(x) + \vartheta(x),$$

qui est continue au point (x_0).

Remarquons qu'on peut établir pour la fonction $\vartheta(x)$ les inégalités, analogues aux inégalités (52'). On a pour une certaine portion (r_ε')

$$\vartheta(x_0) \leqq M_\varepsilon' < \vartheta(x_0) + 2\varepsilon, \quad \vartheta(x_0) - 2\varepsilon < m_\varepsilon' \leqq \vartheta(x_0),$$

en désignant par M_ε' et m_ε' les bornes de $\vartheta(x)$ sur (r_ε').

En désignant par (σ_ε') la partie commune de (r_ε) et (r_ε'), on a sur (σ_ε'):

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < 2\varepsilon.$$

En conservant les notations du § 8 (1), nous avons sur (σ_ε')

$$\overline{\Sigma_m}(x) < \overline{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\,d\sigma} + \overline{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \vartheta(x)\,d\sigma} <$$

$$< f(x_0) + 2\varepsilon + \vartheta(x_0) + 2\varepsilon = \varphi(x_0) + 4\varepsilon$$

$$\underline{\Sigma_m}(x) \geqq \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \underline{f(x)\, d\sigma} + \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \underline{\vartheta(x)\, d\sigma} >$$

$$> f(x_0) - 2\varepsilon + \vartheta(x_0) - 2\varepsilon = \varphi(x_0) - 4\varepsilon,$$

d'où il suit que sur (σ_ε'):

$$\overline{\Sigma_m}(x) - \underline{\Sigma_m}(x) < 8\varepsilon.$$

Comme le point (x_0) est contenu dans chaque (σ_ε'), on en conclut, que

$$\overline{\Sigma_m}(x_0) = \underline{\Sigma_m}(x_0) = \varphi(x_0).$$

La fonction $\mu(\sigma)$ étant absolument continue, elle est suivant le théorème du § 12 (1) la moyenne de la fonction $\underline{\mu(x)}$, qui est sommable sur (S). Or, on a en premier lieu

$$\overline{\mu}(x_0) \leqq \varphi(x_0) + \overline{r_m}(x_0), \quad \underline{\mu}(x_0) \geqq \varphi(x_0) + \underline{r_m(x_0)}.$$

Il suit de là que

$$\overline{\mu}(x_0) - \underline{\mu}(x_0) < |\overline{r_m}(x_0)| + |\underline{r_m}(x_0)| < 2\varepsilon;$$

la fonction $\mu(\sigma)$ a donc une valeur au point (x_0).

En second lieu, on a sur (σ_ε'):

$$\overline{\mu}(x) \leqq \overline{\Sigma_m}(x) + \overline{r_m}(x), \quad \underline{\mu(x)} \geqq \underline{\Sigma_m(x)} + \underline{r_m(x)}.$$

Il suit de là que

$$\overline{\mu}(x) - \mu(x_0) \leqq \overline{\Sigma_m}(x) - \varphi(x_0) + 2\varepsilon < 6\varepsilon$$

$$\overline{\mu}(x) - \mu(x_0) \geqq \underline{\mu}(x) - \mu(x_0) > \underline{\Sigma_m}(x) - \varphi(x_0) - 2\varepsilon > -6\varepsilon;$$

c'est-à-dire sur (σ_ε') on a

$$-6\varepsilon < \underline{\mu(x)} - \mu(x_0) < 6\varepsilon,$$

ce qui montre que la fonction $\underline{\mu(x)}$ est continue au point (x_0).

On conclut de tout cela que (σ_0) étant une portion de (S) contenant le point (x_0), on a

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\mu(\sigma_1)\,d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\underline{\mu(x_1)}\,d\sigma_1}{r_{10}},$$

la fonction $\underline{\mu(x)}$ étant continue au point (x_0).

La théorème de Liapounoff, cité dans le § 2 (5), montre, maintenant, que V possède la dérivée normale au point (x_0) et qu'on a au point (x_0):

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\mu(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)\,d\sigma_1}{r_{10}^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{\underline{\mu(x_1)}\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 + \underline{\mu(x_0)}.$$

Or, en donnant à l'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} \mu(\sigma_1)k(\sigma,\ 1)\,d\sigma_1 + \mu(\sigma) = u(\sigma)$$

la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \mu(\sigma_1)k(\sigma,\ 1)\,d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)} \mu(\sigma_1)k(\sigma,\ 1)\,d\sigma_1 + \mu(\sigma) = u(\sigma)$$

on peut la transformer, (σ) étant dans l'intérieur de (σ_0), en

$$\frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\left(\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\mu(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1\right)d\sigma + \frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\left(\int\limits_{(\sigma_0)} \underline{\mu(x_1)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1\right)d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \underline{\mu(x)}\,d\sigma = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\,d\sigma,$$

d'où l'on conclut que

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\mu(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma_0)} \underline{\mu(x_1)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 + \underline{\mu(x)} - f(x)\right\}d\sigma = 0$$

et, la fonction sous le signe de l'intégrale étant continue au point (x_0):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\mu(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma_0)} \underline{\mu(x_1)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 + \underline{\mu(x_0)} = f(x_0),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV_i}{dn} = f(x_0) \cdot$$

Nous avons ainsi: si la fonction $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ sommable sur (S), dans chaque point (x_0), où $f(x)$ est continue, la fonction V, trouvée par nous dans les paragraphes précédents, résout le problème de Neumann pour la fonction $f(x)$ en sens ordinaire.

13. Il reste encore à traiter la question de l'unicité de la solution du problème (A).

Nous démontrerons que parmi les fonctions harmoniques, auquelles on peut donner la forme

$$W = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma_1^{(i)}(W)\, d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} W^{(i)}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma.$$

dans le cas d'un problème intérieur, et la forme

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma_1^{(i)}(W)\, d\sigma_1}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} W^{(i)}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1,$$

dans le cas d'un problème extérieur, et pour lesquelles les valeurs moyennes $W^{(i)}(\sigma)$, respectivement $W^{(e)}(\sigma)$, sont les fonctions continues sur (S),—il n'existe pas d'autres solutions que celles que nous avons trouvées, en négligeant, évidemment, dans le cas d'un problème intérieur, la constante additive qu'on peut ajouter à V, suivant une remarque dans le § 11.

Comme la démonstration de cette assertion est basée sur quelques relations, qui seront établies à propos du problème de Dirichlet, nous la remettons jusqu'au chapitre suivant.

14. Supposons, que $G^{(i)}$, $G^{(e)}$ sont les fonctions de Franz Neumann, qui servent à résoudre le problème de Neumann dans le cas, quand la valeur normale de la fonction harmonique cherchée V est continue sur (S). C'est-à-dire,* supposons, que

$$G^{(e)} = \frac{1}{r_{10}} + \Gamma^{(e)}, \quad G^{(i)} = \frac{1}{r_{10}} + \Gamma^{(i)} + C$$

* Voir, par exemple, J. Hadamard, «Leçons sur la propagation des ondes», pp. 33, 34.

où $\Gamma^{(e)}$ est la fonction harmonique du point (x_1), définie dans $(D^{(e)})$, telle qu'on ait sur (S_1):

$$(55)\qquad \left(\frac{d\Gamma^{(e)}}{dn_1}\right)_e = \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2},$$

et $\Gamma^{(i)}$ est la fonction harmonique du point (x_1), définie dans $(D^{(i)})$, telle qu'on ait

$$(55')\qquad \left(\frac{d\Gamma^{(i)}}{dn_1}\right)_i = \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} - \frac{2\pi}{S},$$

la constante C étant assujettie à la condition

$$\int\limits_{(S_1)} G^{(i)}\, d\sigma_1 = 0.$$

Les solutions du problème de Neumann, posé dans le § 1, sont données respectivement par les formules

$$(56)\qquad V = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\, G^{(i)}\, d\sigma_1, \quad V = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\, G^{(e)}\, d\sigma_1.$$

Pour le démontrer, envisageons en premier lieu le problème intérieur. Soit V la solution de ce problème, qui est trouvée dans les paragraphes précédents. Comme V est un potentiel de simple couche, nous pouvons appliquer les formules du § 12 (5):

$$(57)\qquad V = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \sigma_1^{(i)}(V)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} V(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} V(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1.$$

Or, on a suivant le § 13 (5):

$$\int\limits_{(S_1)} \left(V(\sigma_1)\frac{d\Gamma^{(i)}}{dn_1} - \Gamma_1^{(i)}\,\sigma_1^{(i)}(V)\right) d\sigma_1 = 0,$$

l'indice (1) indiquant que la fonction $\Gamma^{(i)}$ est traitée comme fonction de (x_1), c'est-à-dire:

$$\int_{(S_1)} \left(V(\sigma_1) \frac{d\Gamma^{(i)}}{dn_1} - \Gamma_1^{(i)} u(\sigma_1) \right) d\sigma_1 = 0.$$

En utilisant (55') nous pouvons donner à la dernière identité la forme

$$(58) \quad \int_{(S_1)} V(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \int_{(S_1)} \Gamma_1^{(i)} u(\sigma_1) d\sigma_1 - \frac{2\pi}{S_1} V_i(S_1) S_1 = 0.$$

En retranchant l'égalité (58) de l'égalité (57), nous obtenons

$$(59) \quad V = \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} u(\sigma_1) \left\{ \frac{1}{r_{10}} + \Gamma_1^{(i)} \right\} d\sigma_1 + C = \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} u(\sigma_1) G_1^{(i)} d\sigma_1 + C,$$

en désignant par C une constante, ce qu'il fallait démontrer.

Si la fonction $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ sommable sur (S), comme $G_1^{(i)}$ est continue et bornée sur (S), si le point (x) est dans l'intérieur du domaine $(D^{(i)})$, en s'appuyant sur le théorème du § 7 (2), on peut donner à l'égalité (59) la forme

$$(60) \quad V = \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} f(x_1) G_1^{(i)} d\sigma_1 + C.$$

On démontre de la même manière la seconde des égalités (56) et dans le cas quand

$$u(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} f(x) d\sigma$$

on peut lui donner la forme

$$(60') \quad V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} f(x_1) G_1^{(e)} d\sigma_1.$$

On voit ainsi, que les formules classiques (60) et (60') de la thèorie du potentiel subsistent dans le cas général, quand la fonction $f(x)$ est seulement sommable. Les fonctions (60) et (60') vérifient les conditions:

a) Pour chaque point (x), où la fonction $f(x)$ est continue, on a

$$\frac{dV_i}{dn} = f(x),$$

respectivement

$$\frac{dV_e}{dn} = f(x);$$

b) Pour chaque domaine (σ) sur (S) on a

$$\sigma^{(i)}(V) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\,d\sigma,$$

respectivement

$$\sigma^{(e)}(V) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\,d\sigma.$$

CHAPITRE 7

Le problème de Dirichlet

1. Soit donné un domaine $(D^{(i)})$, limité par la frontière (S), qui répond aux conditions énumérées dans le § 1 (5).

Soit donnée une fonction $u(\sigma)$ des portions (σ) de la surface (S), qui est additive et à variation bornée.

Désignons, suivant les notations du § 10 (5) par $V(\sigma')$ la valeur moyenne d'une fonction V sur la portion (σ'), définie suivant les règles du § 10 (5) et située dans l'intérieur d'un des domaines $(D^{(i)})$, $(D^{(e)})$ c'est-à-dire posons

$$(1) \qquad V(\sigma') = \frac{1}{\sigma'}\int\limits_{(\sigma')} V'\,d\sigma$$

et proposons-nous de résoudre le problème (A): trouver une fonction V harmonique dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ où dans l'interieur de $(D^{(e)})$, telle qu'on ait pour chaque portion (σ) de la surface (S):

$$(2) \qquad V^{(i)}(\sigma) = u(\sigma),$$

respectivement

$$V^{(e)}(\sigma) = u(\sigma),$$

où $V^{(i)}(\sigma)$, respectivement $V^{(e)}(\sigma)$, sont les limites de la quantité (1), vers laquelle elle tend, quand (σ') tend vers (σ), étant dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, respectivement dans l'intérieur de $(D^{(e)})$.

En parlant des domaines $(D^{(i)})$ et $(D^{(e)})$ nous supposons toujours, que $(D^{(e)})$ contient le point à l'infini et nous distingons les trois cas: le cas ordinaire, le cas (I) et le cas (E), définis dans le § 1 (5).

2. En abordant le problème (A) nous supposerons, que la fonction $u(\sigma)$ est continue. Si la fonction $u(\sigma)$ est continue, la condition du théorème du § 12 (5)

$$\underline{U}(\sigma_0) = U(\sigma_0), \quad \overline{U}(\sigma_0) = U(\sigma_0), \tag{3}$$

où $U(\sigma)$ est la variation moyenne de $u(\sigma)$, est satisfaite pour chaque domaine (σ_0).

Ayant fait cette restriction, nous substituons au problème (A) le problème (B) suivant: trouver un potentiel de double couche

$$w(x) = \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \tag{4}$$

qui satisfait à la condition

$$w^{(i)}(\sigma) = u(\sigma)$$

dans le cas du problème intérieur et à la condition

$$w^{(e)}(\sigma) = u(\sigma)$$

dans le cas du problème extérieur. Nous désignons, comme toujours, par r_1 la distance entre le point (x) et le point (x_1) sur (S), dirigée vers le point (x_1); par (S_1), (σ_1) la surface (S) et ses portions (σ), si (S) est traitée comme le lieu géométrique des points (x_1). Nous désignerons par (S_i) et (σ_i) la surface (S) et ses portions, si elles sont traitées comme le lieu géométrique des points (x_i).

Suivant le théorème du § 12 (5), si pour un certain domaine σ_0 on a

$$\underline{\theta}(\sigma_0) = \theta(\sigma_0), \quad \overline{\theta}(\sigma_0) = \theta(\sigma_0),$$

$\theta(\sigma)$ étant la variation moyenne de $\vartheta(\sigma)$, les limites $w^{(i)}(\sigma_0)$, $w^{(e)}(\sigma_0)$ existent et on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} w^{(i)}(\sigma_0) &= \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\, l(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 + 2\pi\,\vartheta(\sigma_0), \\ w^{(e)}(\sigma_0) &= \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\, l(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1 - 2\pi\,\vartheta(\sigma_0), \end{aligned}$$

où

$$(6) \qquad l(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma,$$

l'integration dans la dernière intégrale étant effectuée suivant le point (x) et N_1 étant la normale à (S_1) au point (x_1).

Comme le potentiel w est une fonction harmonique dans l'intérieur de $(D^{(i)})$ ainsi que dans l'intérieur de $(D^{(e)})$, le problème (B) n'est qu'un cas particulier du problème (A).

Mais les problèmes (A) et (B) ne sont aucunement équivalents: pour que le problème (B) extérieur devienne possible, il faut poser des conditions supplémentaires.

D'un autre côté, en s'occupant du problème (B) on peut le généraliser en éliminant la supposition que la fonction $u(\sigma)$ est continue.

En donnant à la quantité

$$\int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\, l(\sigma_0, x_1)\, d\sigma_1 \pm 2\pi\,\vartheta(\sigma_0)$$

le nom de la valeur relative de la moyenne de w sur (σ_0) du côté intérieur, respectivement, du côté extérieur de (S), on peut chercher le potentiel de double couche pour lequel cette valeur relative de la moyenne est égale à une fonction moyenne arbitraire $u(\sigma)$.

Suivant la définition des valeurs moyennes relatives d'un potentiel de double couche, les égalités (5) subsistent, si $w^{(i)}(\sigma_0)$ et $w^{(e)}(\sigma_0)$ sont ces valeurs.

Comme conséquence des égalités (5) nous avons

$$(7) \qquad \begin{aligned} w^{(i)}(\sigma_0) + w^{(e)}(\sigma_0) &= 2 \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\, l(\sigma_0, 1)\, d\sigma_1, \\ w^{(i)}(\sigma_0) - w^{(e)}(\sigma_0) &= 4\pi\,\vartheta(\sigma_0). \end{aligned}$$

Les égalités (5) et (7) montrent qu'on peut pour résoudre le problème (B) suivre la marche ordinairement adaptée pour la résolution du problème de Dirichlet, qui consiste dans la substitution à la place du problème (B) d'un problème plus général, précisément, dans la résolution de l'équation

$$w^{(i)}(\sigma) - w^{(e)}(\sigma) = 2\xi w(\sigma) + 2u(\sigma) \tag{8}$$

dans laquelle

$$w(\sigma) = \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) l(\sigma, 1) d\sigma_1. \tag{9}$$

Si $w(\xi, 0)$ est la solution de l'équation (8), la fonction $w(-1, 0)$ résout le problème intérieur et la fonction $w(1, 0)$ — le problème extérieur, en supposant, certainement, que la fonction $w(\xi, 0)$ a un sens pour $\xi = -1$, respectivement pour $\xi = 1$.

En effet, l'équation (8) donne pour $\xi = +1$:

$$w^{(i)}(\sigma_0) - w^{(e)}(\sigma_0) = 2w(\sigma_0) + 2u(\sigma_0) = w^{(i)}(\sigma_0) + w^{(e)}(\sigma_0) + 2u(\sigma_0),$$
$$w^{(e)}(\sigma_0) = -u(\sigma_0)$$

et pour $\xi = -1$:

$$w^{(i)}(\sigma_0) - w^{(e)}(\sigma_0) = -2w(\sigma_0) + 2u(\sigma_0) = -w^{(i)}(\sigma_0) - w^{(e)}(\sigma_0) + 2u(\sigma_0)$$
$$w^{(i)}(\sigma_0) = u(\sigma_0).$$

En substituant dans (8) à la place de $w(\sigma)$ sa valeur (9) et en utilisant la seconde des égalités (7), nous obtenons l'équation intégrale

$$2\pi\vartheta(\sigma) = \xi \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) l(\sigma, 1) d\sigma_1 + u(\sigma),$$

qui définie la fonction $\vartheta(\sigma)$.

La forme de l'équation obtenue montre qu'il est plus commode de désigner la densité inconnue du potentiel de double couche par $\frac{1}{2\pi}\vartheta(\sigma)$, en écrivant

$$w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \tag{4'}$$

à la place de (4), ce qui conduit à l'équation

$$\vartheta(\sigma) = \frac{\xi}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\, l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 + u(\sigma). \tag{10}$$

Nous avons remarqué dans le § 14 (5) que le noyau

$$\frac{1}{2\pi} l(\sigma, 1)$$

de l'équation (10) répond à la condition (A) du § 1 (3); $l(\sigma, 1)$ est continue, comme fonction du point (x_1) pour chaque choix de (σ) et sa borne totale est bornée comme fonction de (x_1); le noyau $l(\sigma, 1)$ n'est pas fini.

3. On obtient une solution formelle de l'équation (10) en posant

$$\vartheta(\sigma) = u(\sigma) + \xi \vartheta_1(\sigma) + \xi^2 \vartheta_2(\sigma) + \cdots \tag{11}$$

$$\vartheta_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} l(\sigma, 1)\, \vartheta_{k-1}(\sigma_1)\, d\sigma_1, \quad \vartheta_0(\sigma) = u(\sigma); \tag{12}$$

il est démontré, en effet, dans le § 9 (2), que la fonction $\vartheta_k(\sigma)$ est à variation bornée, si la fonction $\vartheta_{k-1}(\sigma)$ est à variation bornée, d'où suit que la formation de la série (11) est possible.

La série (11) conduit à la solution de l'équation (8):

$$w(0) = w_1(0) + \xi w_2(0) + \xi^2 w_3(0) + \cdots \tag{13}$$

où

$$\begin{aligned} w_1(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} u(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \\ w_k(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_{k-1}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Comme on a

$$w_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_{k-1}(\sigma_1)\, l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \vartheta_k(\sigma)$$

on peut écrire

$$w_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} w_{k-1}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \tag{15}$$

ce qui permet de calculer les fonctions $w_1(0)$, $w_2(0)$, ... pas à pas sans avoir recours aux fonctions $\vartheta_1(\sigma)$, $\vartheta_2(\sigma)$, ...

La fonction moyenne $l(\sigma, 1)$ est absolument continue, quand la position du point (x_1) est fixe. On démontre sans peine, comme dans le § 5 (5), que cette continuité est uniforme sur (S_1).

En effet, en construisant une sphère ayant le point (x_1) pour centre et un rayon δ suffisamment petit, on a

$$\int_{(\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La longueur de δ ne dépend pas de la position du point (x_1). Étant donné, maintenant, un domaine (σ), désignons par $(\sigma\delta)$ la portion commune à (σ) et à (δ). Nous avons

$$(16) \quad \int_{(\sigma)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma = \int_{(\sigma\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma + \int_{(\sigma-\sigma\delta)} \frac{|\cos(r_{10} N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{\delta^2}.$$

Donc, si

$$\sigma < \frac{\varepsilon\delta^2}{2} = \eta,$$

on a

$$|l(\sigma, 1)| \sigma < \varepsilon.$$

On conclut de là que les fonctions

$$(17) \qquad w_1(\sigma) = \vartheta_1(\sigma), \quad w_2(\sigma) = \vartheta_2(\sigma), \ldots, w_m(\sigma) = \vartheta_m(\sigma), \ldots$$

sont toutes absolument continues, même si la fenction $u(\sigma)$ n'est pas continue. On a en effet

$$\Sigma |w_m(\sigma_i)| \sigma_i \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \theta(\sigma_1) \Sigma |l(\sigma_i, 1)| \sigma_i \, d\sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta(S_1) S_1,$$

si

$$\sigma < \eta.$$

4. Comme le noyau

$$\frac{1}{2\pi} l(\sigma, 1)$$

répond à la condition (A), les considérations du § 7 (3) sont applicables à l'équation (10).

En appliquant le procédé d'itération, on peut affirmer, que la fonction $\vartheta(\sigma)$, si elle satisfait à l'equation (10), vérifie l'équation

$$\vartheta(\sigma) = \xi^n \int\limits_{(S_1)} l_n(\sigma, 1)\vartheta(\sigma_1)d\sigma_1 + s_n(\sigma) \tag{18}$$

où

$$s_n(\sigma) = u(\sigma) + \xi \int\limits_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)u(\sigma_1)d\sigma_1 + \tag{19}$$

$$+ \xi^2 \int\limits_{(S_1)} l_2(\sigma, 1)u(\sigma_1)d\sigma_1 + \cdots + \xi^{n-1} \int\limits_{(S_1)} l_{n-1}(\sigma, 1)u(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Nous désignons ici par $l_n(\sigma, 1)$ le noyau itéré

$$l_n(\sigma, 1) = \int\limits_{(S_2)} l_1(\sigma, 2)l_{n-1}(\sigma_2, 1)d\sigma_2 = \int\limits_{(S_2)} l_m(\sigma, 2)l_{n-m}(\sigma_2, 1)d\sigma_2, \tag{20}$$

ayant posé pour simplifier les formules

$$l_1(\sigma, 1) = \frac{1}{2\pi} l(\sigma, 1);$$

suivant le théorème du § 7 (3) les noyaux $l_n(\sigma, 1)$ répondent à la condition (A), car le noyau $l_1(\sigma, 1)$ répond à cette condition. Réciproquement, si un des noyaux itérés $l_n(\sigma, 1)$ est fini, la solution de l'équation (18) vérifie l'équation (10); dans ce cas, la fonction $\vartheta(\sigma)$ est pour chaque choix de $u(\sigma)$ une fonction méromorphe de ξ et pour s'assurer, que le rayon de convergence de la série (13) surpasse l'unité, il suffit de s'assurer que cette fonction méromorphe n'a pas des pôles, dont les modules ne surpassent pas l'unité.

5. Ayant posé dans le § 5 (6)

$$k_1(0, 1) = -\frac{\cos(r_{10} N_1)}{2\pi r_{10}^2}, \tag{21}$$

nous avons considéré dans le chapitre 6 le noyau

$$k_1(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} k_1(0, 1)d\sigma \tag{22}$$

et nous avons démontré dans les §§ 6 (6), 7 (6) que les noyaux itérés

$$k_m(0,\ 1) = \int_{(S_2)} k_1(0,\ 2) k_{m-1}(2,\ 1)\, d\sigma_2,$$

$$k_m(\sigma,\ 1) = \int_{(S_2)} k_1(\sigma,\ 2) k_{m-1}(\sigma_2,\ 1)\, d\sigma_2 = \int_{(S_2)} k_t(\sigma, 2) k_{m-t}(\sigma_2, 1)\, d\sigma_2$$

sont liés par la relation

$$k_m(\sigma,\ 1) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} k_m(0,\ 1)\, d\sigma. \tag{23}$$

De plus, nous avons démontré, que si

$$2 - n\lambda < 0, \tag{24}$$

le noyau $k_n(0,\ 1)$ est une fonction bornée, d'où il suivait que le noyau $k_n(\sigma, 1)$ est fini.

Comme on a

$$l_1(\sigma,\ 1) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10}\, N_1)}{r_{10}^{\ 2}}\, d\sigma,$$

on trouve

$$l_1(\sigma_1, 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{01}\, N_0)}{r_{10}^{\ 2}}\, d\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{10}\, N_0)}{r_{10}^{\ 2}}\, d\sigma_1 = \tag{25}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_1(0,\ 1)\, d\sigma_1.$$

En comparant les égalités (22) et (25) on trouve facilement

$$\frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_1(\sigma,\ 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} l_1(\sigma_1,\ 0)\, d\sigma. \tag{26}$$

En effet, l'égalité

$$\int_{(\sigma_1)} \left(\int_{(\sigma)} k_1(0,\ 1)\, d\sigma \right) d\sigma_1 = \int_{(\sigma)} \left(\int_{(\sigma_1)} k_1(0,\ 1)\, d\sigma_1 \right) d\sigma$$

n'est qu'un cas particulier de l'identité (26) du § 7 (6), qu'on obtient en mettant l'unité à la place de $k_{m-1}(0, 1)$.

Nous démontrerons que l'égalité (26) subsiste pour tous les noyaux itérés, c'est-à-dire qu'on a pour chaque m:

$$(27) \qquad \frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_m(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} l_m(\sigma_1, 0)\, d\sigma.$$

Comme l'égalité (27) est satisfaite pour $m = 1$, on peut supposer, en la démontrant pas à pas, que l'égalité

$$(27') \qquad \frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_{m'}(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} l_{m'}(\sigma_1, 0)\, d\sigma$$

est satisfaite pour $m' < m$.

En utilisant le théorème du § 7 (2), nous avons, d'après (27'):

$$\frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_m(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} \Big(\int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2)\, k_{m-1}(\sigma_2, 1)\, d\sigma_2 \Big)\, d\sigma_1 =$$

$$= \int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2) \Big(\frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_{m-1}(\sigma_2, 1)\, d\sigma_1 \Big)\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} k_1(\sigma, 2) \Big(\frac{1}{\sigma_2} \int_{(\sigma_2)} l_{m-1}(\sigma_1, 2)\, d\sigma_2 \Big)\, d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_{(S_2)} \Big(\int_{(\sigma)} k_1(0, 2)\, d\sigma \Big) \Big(\frac{1}{\sigma_2} \int_{(\sigma_2)} l_{m-1}(\sigma_1, 2)\, d\sigma_2 \Big)\, d\sigma_2.$$

En appliquant maintenant les théorèmes des §§ 11 (2) et 12 (2), on obtient

$$(28) \quad \frac{1}{\sigma_1} \int_{(\sigma_1)} k_m(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \Big(\int_{(S_2)} k_1(0, 2) \frac{1}{\sigma_2} \int_{(\sigma_2)} l_{m-1}(\sigma_1, 2)\, d\sigma_2 \Big)\, d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \Big(\int_{(S_2)} k_1(0, 2)\, l_{m-1}(\sigma_1, 2)\, d\sigma_2 \Big)\, d\sigma_1;$$

le théorème du § 12 (2) est applicable, car l'intégrale

$$\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}|l_{m-1}(\sigma_1, 2)d\sigma_2|\right)|k_1(0, 2)|\,d\sigma_2=\int\limits_{(S_2)}|l_{m-1}(\sigma_1, 2)|\,|k_1(0, 2)|\,d\sigma_2$$

est uniformément convergente, la fonction $l_{m-1}(\sigma, 2)$ étant continue comme fonction de (x_2).

Or, on a suivant (25):

$$l_m(\sigma_1, 0)=\int\limits_{(S_2)}l_{m-1}(\sigma_1, 2)\,l_1(\sigma_2, 0)\,d\sigma_2=$$

$$=\int\limits_{(S_2)}l_{m-1}(\sigma_1, 2)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}k_1(0, 2)\,d\sigma_2\right)d\sigma_2=\int\limits_{(S_2)}l_{m-1}(\sigma_1, 2)\,k_1(0, 2)\,d\sigma_2.$$

L'égalité (28) prend donc la forme

$$\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{(\sigma_1)}k_m(\sigma, 1)\,d\sigma_1=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}l_m(\sigma_1, 0)\,d\sigma,$$

ce qu'il était à démontrer.

En utilisant l'égalité (23), nous obtenons

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}l_m(\sigma_1, 0)\,d\sigma=\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{(\sigma_1)}\left(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}k_m(0, 1)\,d\sigma\right)d\sigma_1=\frac{1}{\sigma_1\,\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\left(\int\limits_{(\sigma_1)}k_m(0, 1)\,d\sigma_1\right)d\sigma$$

ce qui est de nouveau une simple conséquence de l'identité (26) du § 7 (6).

La dernière égalité conduit à la conclusion, que pour chaque (σ) on a

$$\int\limits_{(\sigma)}\left(\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{(\sigma_1)}k_m(0, 1)\,d\sigma_1-l_m(\sigma_1, 0)\right)d\sigma=0.$$

Les fonctions

$$\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{(\sigma_1)}k_m(0, 1)\,d\sigma_1,\ l_m(\sigma_1, 0)$$

étant pour chaque (σ_1) les fonctions continues du point (x), on en conclut que

$$l_m(\sigma_1, 0)=\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{(\sigma_1)}k_m(0, 1)\,d\sigma_1. \tag{29}$$

Il suit de là, que $l_n(\sigma_1, 0)$ est fini, si n satisfait à l'inégalité (24).

6. Revenons maintenant aux considérations du § 4. Nous avons que la solution de l'équation

$$\vartheta(\sigma) = \xi \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\, \vartheta(\sigma_1)\, d\sigma_1 + u(\sigma) \tag{10}$$

vérifie l'équation

$$\vartheta(\sigma) = \xi^n \int_{(S_1)} l_n(\sigma, 1)\, \vartheta(\sigma_1)\, d\sigma_1 + s_n(\sigma) \tag{18}$$

où

$$s_n(\sigma) = u(\sigma) + \xi \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\, u(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \xi^2 \int_{(S_1)} l_2(\sigma, 1)\, u(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \tag{19}$$

$$+ \cdots + \xi^{n-1} \int_{(S_1)} l_{n-1}(\sigma, 1)\, u(\sigma_1)\, d\sigma_1.$$

L'équation, associée à l'équation (18), a la forme

$$\varphi(x_1) = \xi^n \int_{(S)} l_n(\sigma, 1)\, \varphi(x)\, d\sigma + F(x_1) = \tag{30}$$

$$= \xi^n \int_{(S)} \left(\frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} k_n(1, 0)\, d\sigma \right) \varphi(x)\, d\sigma + F(x_1) = \xi^n \int_{(S)} k_n(1, 0)\, \varphi(x)\, d\sigma + F(x_1).$$

Or, c'est l'associée de l'équation

$$\varphi(x) = \xi^n \int_{(S_1)} k_n(1, 0)\, \varphi(x_1)\, d\sigma_1 + F(x), \tag{31}$$

qui a été envisagée par nous dans le § 8 (6) sous la forme

$$\varphi(x_1) = \xi^n \int_{(S)} k_n(0, 1)\, \varphi(x)\, d\sigma + F(x_1).$$

Nous y avons désigné sa résolvante par

$$\Gamma(0, 1, \xi) = \frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)}.$$

$D(\xi)$ étant le déterminant de Fredholm, attaché aux équations (30) et (31). La résolvante de l'équation (30) est donc égale à

$$\Gamma(1, 0, \xi) = \frac{D(1, 0, \xi)}{D(\xi)} \tag{32}$$

d'où suit, que la résolvante commune des équations (18) et (30) est égale à

$$\Gamma(1, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \Gamma(1, 0, \xi)\, d\sigma = \frac{D(1, \sigma, \xi)}{D(\xi)}, \tag{33}$$

où

$$D(1, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} D(1, 0, \xi)\, d\sigma.$$

Il suit de tout cela que

$$\vartheta(\sigma) = s_n(\sigma) + \xi^n \int\limits_{(S_1)} s_n(\sigma_1)\, \Gamma(1, \sigma, \xi)\, d\sigma_1 = \frac{D_2(\sigma, \xi)}{D_2(\xi)}, \tag{34}$$

$D_2(\sigma, \xi)$ et $D_2(\xi)$ étant les fonctions entières de ξ; nous supposons, que la fraction (34) est réduite.

En poursuivant les raisonnements du § 8 (6), on conclut, comme le terme complémentaire de la série $D(1, 0, \xi)$ est égal, suivant les notations du dit paragraphe, à $R_m(1, 0)$, que si,

$$|\xi| < l \tag{35}$$

on à

$$|R_m(1, 0)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

le nombre N étant indépendant de la position des points (x) et (x_1).

Il suit de là, qu'on peut poser

$$|R_m(1, \sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

indépendamment de la valeur choisie de (σ), $R_m(1, \sigma)$ étant le terme complémentaire de la série $D(1, \sigma, \xi)$, ce qui conduit à la même conclusion,

que celle qui à été obtenue dans le § 8 (6): si q est le plus petit module des racines de $D_2(\xi)$, la série (11), qui donne le développement de la fonction $\vartheta(\sigma)$, est convergente pour les valeurs de ξ, ayant le module ne surpassant pas q et que pour

$$|\xi| < q_1 < q$$

le terme complémentaire de la série (11) est en valeur absolue moindre que ε, dès que son indice surpasse le nombre N, qui est indépendant du choix de (σ).

7. Nous nous sommes rappelé dans le § 9 (6) les propriétés de la fonction

$$\frac{D(1, 0, \xi)}{D(\xi)}; \tag{32}$$

elle ne possède pas des pôles ayant les modules plus petits que l'unité; parmi les nombres, dont le module est égal à l'unité, le nombre $\xi = -1$ n'est pas son pôle dans le cas ordinaire et dans le cas (E), mais il peut être un pôle dans le cas (I); si, dans ce cas, $\xi = -1$ est le pôle de (32), c'est un pôle simple.

L'équation homogène

$$\psi(x) = \int_{(S_1)} k_1(0, 1)\psi(x_1)\,d\sigma_1 \tag{36}$$

a dans le cas ordinaire et dans le cas (I) une seule solution qui est linéairement indépendante des autres. On obtient cette solution en formant la variable

$$\rho_n(0) = \int_{(S_1)} k_1(0, 1)\,\rho_{n-1}(1)\,d\sigma_1; \tag{37}$$

en formant cette variable, on peut choisir $\rho_0(0)$ arbitrairement; la solution cherchée est donnée par la limite de la variable $\rho_{2n} + \rho_{2n-1}$. Dans le cas (E) le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation (36) est égal à k. On les obtient en choisissant convenablement $\rho_0(0)$; pour les obtenir toutes il suffit de poser

$$\rho_0(0) = \rho_0^{(\lambda)}(0), \int_{(S^{(l)})} \rho_0^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = 0, \ \lambda \neq l,$$

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_0^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = \frac{1}{2}, \ l = \lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k.$$

Désignons ces fonctions par

$$\rho^{(1)},\ \rho^{(2)},\ \dots\ \rho^{(k)}.$$

On s'assure aisément en intégrant (37) sur $(S^{(l)})$ qu'on a

$$\int_{(S^{(l)})} \rho^{(\lambda)}(0)\, d\sigma = 0, \quad \text{si} \quad \lambda \neq l; \ = 1, \quad \text{si} \quad l = \lambda.$$

La limite de la variable $\rho_{2n} + \rho_{2n-1}$ est égale à zéro, si l'on a

$$\int_{(S)} \rho_0(0)\, d\sigma = 0,$$

respectivement, dans le cas (E), si

$$\int_{S^{(l)}} \rho_0(0)\, d\sigma = 0, \qquad l=1, 2, \dots k.$$

Dans le cas (I) l'équation

$$(36') \qquad \psi(x) = -\int_{(S_1)} k_1(0, 1)\, \psi(x_1)\, d\sigma_1$$

a k solutions linéairement indépendantes; on les obtient toutes en cherchant les limites de la variable $\rho_{2n} - \rho_{2n-1}$, ayant posé

$$\rho_0(0) = \rho_0^{(\lambda)}(0), \ \int_{(S^{(l)})} \rho_0^{(\lambda)}(0)\, d\sigma = 0, \ \lambda \neq l,$$

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_0^{(\lambda)}(0)\, d\sigma = \frac{1}{2}, \ l = \lambda, \qquad \lambda=1, 2, \dots k.$$

Désignons ces fonctions par

$$\psi^{(1)},\ \psi^{(2)},\ \dots,\ \psi^{(k)}.$$

On s'assure aisément, en remarquant que

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_n(0)\, d\sigma = -\int_{(S^{(l)})} \rho_{n-1}(0)\, d\sigma,$$

qu'on a

$$\int_{(S^{(l)})} \psi^{(\lambda)} d\sigma = 0, \quad \text{si} \quad l \neq \lambda; \ = 1, \quad \text{si} \quad l = \lambda.$$

La limite mentionnée est égale à zéro, si l'on a

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_0(0)\, d\sigma = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots k.$$

En s'occupant du noyau $k_n(0, 1)$ on s'assure aisément que dans le cas ordinaire et dans le cas (I) on a

$$\int_{(S)} k_n(0, 1)\, d\sigma = 1;$$

dans le cas (E) on a

$$\int_{(S^{(l)})} k_n(0, 1)\, d\sigma = 1, \ \text{ou} = 0,$$

suivant que le point (x_1) est sur $(S^{(l)})$ ou non; dans le cas (I), on a, si $(S^{(l)})$ est une frontière intérieure:

$$\int_{(S^{(l)})} k_n(0, 1)\, d\sigma = (-1)^n, \ \text{ou} = 0$$

suivant que le point (x_1) soit sur $(S^{(l)})$ ou non.

Pour le démontrer il suffit d'effectuer l'intégration mentionnée en se servant de la définition de $k_n(0, 1)$:

$$k_n(0, 1) = \int_{(S_2)} k_1(0, 2)\, k_{n-1}(2, 1)\, d\sigma_2$$

et en utilisant l'identité (26) du § 7 (6).

L'équation

$$\psi(x) = \xi^n \int_{(S_1)} k_n(0, 1)\, \psi(x_1)\, d\sigma_1 + F(x) \tag{38}$$

possède une solution pour $\xi = 1$, si

(39) $$\int_{(S)} F(x)\, d\sigma = 0,$$

respectivement dans le cas (E),

$$\int_{(S^{(l)})} F(x)\, d\sigma = 0, \qquad l=1, 2, \ldots k.$$

En effet, on a, $\psi(x)$ étant la solution de (38):

(40) $$\psi(x) = F(x) + \xi^n \int_{(S_1)} F(1) \frac{D(0, 1, \xi)}{D(\xi)}\, d\sigma_1 = \frac{D_3(0, \xi)}{D_3(\xi)},$$

la fonction à la droite étant réduite. Il suit de là

$$D_3(0, \xi) = \xi^n \int_{(S_1)} k_n(0, 1) D_3(1, \xi)\, d\sigma_1 + D_3(\xi) F(x)$$

ce qui conduit à l'égalité

$$(1 - \xi^n) \int_{(S_1)} D_3(0, \xi)\, d\xi = D_3(\xi) \int_{(S_1)} F(x)\, d\sigma$$

dans le cas ordinaire et dans le cas (I) et aux k égalités analogues dans le cas (E). On en conclut, que sous les conditions (39):

(41) $$\int_{(S)} D_3(0, 1)\, d\sigma = 0$$
$$\text{et si } D_3(1) = 0: \; D_3(0, 1) = \int_{(S_1)} k_n(0, 1) D_3(1, 1)\, d\sigma_1.$$

En posant $\rho_0(0) = D_3(0, 1)$ on trouve

$$D_3(0, 1) = \int_{(S_1)} k_n(0, 1) \rho_0(1)\, d\sigma_1 = \int_{(S_1)} k_{ns}(0, 1) \rho_0(1)\, d\sigma_1 = \rho_{ns}(0)$$

ce qui conduit à la conclusion, que $D_3(0, 1) = 0$, ce qui est impossible, la fraction (44) étant réduite. On a donc $D_3(1) \neq 0$ et la formule (40) donne pour $\xi = 1$ la solution cherchée.

On démontre de même dans le cas (*I*), que l'équation (38) a une solution pour $\xi = -1$, si, n étant impair,

$$(39') \qquad \int\limits_{(S^{(l)})} F(x)\, d\sigma = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots k.$$

En appliquant les mêmes raisonnements on obtient, en supposant que $D(-1) = 0$ et que la condition (39′) est satisfaite, à la place des égalités (41) les égalités

$$(42) \quad \int\limits_{(S^{(l)})} D_3(0, -1)\, d\sigma = 0,\ D_3(0, -1) = (-1)^n \int\limits_{(S_1)} k_n(0, 1) D_3(1, -1)\, d\sigma_1$$

d'où l'on conclut que

$$D_3(0, -1) = (-1)^{ns} \rho_{ns}(0)$$

si l'on pose

$$\rho_0(0) = D_3(0, -1).$$

La variable $\rho_{n2t}(0) - \rho_{n(2t-1)}(0)$ étant égale à $2\, D_3(0, -1)$ cela conduit à la conclusion que $D_3(0, -1)$ est égale à zéro, ce qui est impossible. On a donc $D_3(-1) \neq 0$ et on obtient la solution cherchée en posant dans (40)

$$\xi = -1.$$

8. En s'appuyant sur les remarques qui précèdent, on peut démontrer les *lemmes*:

1) Si la fonction $\varphi(0)$ du point (x) sur (S) vérifie l'équation

$$(43) \qquad \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \varphi(1)\, d\sigma_1 = \int\limits_{(S_1)} k_1(1, 0) \varphi(1)\, d\sigma_1,$$

$\varphi(0)$ est une constante dans le cas ordinaire et dans le cas (*I*); dans le cas (*E*) $\varphi(x)$ est constante sur chaque frontière $(S^{(l)})$.

2) Si la fonction $\varphi(0)$ du point (x) sur (S) vérifie dans le cas (I) l'équation

$$(44) \qquad \varphi(0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\varphi(1)\,d\sigma_1 = -\int\limits_{(S_1)} k_1(1,\,0)\varphi(1)\,d\sigma_1,$$

$\varphi(0)$ est égale à zéro sur la frontière extérieure $(S^{0)})$ et est constante sur chaque frontière intérieure.

Pour s'en assurer il suffit de remarquer, que $\varphi(0)$ vérifiant l'équation (43), vérifie aussi l'équation

$$(43') \qquad \varphi(0) = \int\limits_{(S_1)} k_n(1,\,0)\varphi(1)\,d\sigma_1.$$

Or, si l'on pose dans l'équation (38):

$$F(x) = k_n(x,\,x_3) - k_n(x,\,x_2),$$

où (x_2) et (x_3) sont les points situés d'une manière quelconque sur (S) dans le cas ordinaire et dans le cas (I) et sur une même frontière $(S^{(l)})$ dans le cas (E), on voit que la condition (39) est satisfaite. L'équation (38) possède donc une solution pour $\xi = 1$. Si $\psi(x)$ est cette solution, on obtient, en multipliant (43') par $\psi(x)$ et en intégrant sur (S), que

$$-\int\limits_{(S_1)} k_n(x_1,\,x_3)\varphi(x_1)\,d\sigma_1 + \int\limits_{(S_1)} k_n(x_1,\,x_2)\varphi(x_1)\,d\sigma_1 = -\varphi(x_3) + \varphi(x_2) = 0.$$

d'où on conclut que le lemme (1) est exact.

De même, en posant dans le cas (I)

$$F(x) = k_n(x,\,x_3) - k_n(x,\,x_2),$$

(x_2), (x_3) étant deux points choisis arbitrairement sur une même frontière intérieure, on satisfait aux conditions (39'). L'équation (38) a, donc, dans ce cas une solution $\psi(x)$.

Or la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$\varphi(x) = (-1)^n \int\limits_{(S_1)} k_n(1,\,0)\varphi(x_1)\,d\sigma_1.$$

En multipliant la dernière égalité par $\psi(x)$ et en intégrant sur (S) on trouve

$$-\int_{(S_1)} k_n(x_1, x_2)\varphi(x_1)d\sigma_1 + \int_{(S_1)} k_n(x_1, x_2)\varphi(x_1)d\sigma_1 = -\varphi(x_3) + \varphi(x_2) = 0,$$

d'où suit l'exactitude de l'énoncé pour les frontières intérieures.

En posant

$$\varphi(x) = C^{(i)} \text{ sur } (S^{(i)}), \qquad i=1, 2, \ldots k.$$

on trouve pour un point (x) sur $(S^{(0)})$:

$$\varphi(0) = -\int_{(S_1^{(0)})} k_1(1, 0)\varphi(1)d\sigma_1 - \sum_{i=1}^{i=k} C^{(i)}\int_{(S_1^{(i)})} k_1(1, 0)d\sigma_1 =$$

$$= -\int_{(S_1^{(0)})} k_1(1, 0)\varphi(1)d\sigma_1,$$

car

$$\int_{(S_1^{(i)})} k_1(1, 0)d\sigma_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1^{(i)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1 = 0,$$

si le point (x) est en dehors du domaine limité par $(S^{(i)})$. Le nombre $\xi = -1$ n'étant pas un pôle dans le cas ordinaire d'un domaine, limité par une seule surface $(S^{(0)})$, on conclut de là que $\varphi(x)$ est égale à zéro sur $(S^{(0)})$.

Les deux lemmes que nous venons de démontrer sont équivalents aux deux lemmes suivants:

1) Si

$$\varphi(\sigma) = \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\varphi(\sigma_1)d\sigma_1, \tag{43'}$$

$\varphi(\sigma)$ est constante dans le cas ordinaire et dans le cas (I); dans le cas (E) $\varphi(\sigma)$ est constante sur chaque frontière $(S^{(l)})$.

2) Si dans le cas (I)

$$\varphi(\sigma) = -\int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\varphi(\sigma_1)d\sigma_1, \tag{44'}$$

$\varphi(\sigma)$ est égale à zéro sur la frontière extérieure $(S^{(0)})$ et est une constante sur chaque frontière intérieure.

En appliquant à l'équation (43') le procédé d'itération, nous concluons, que $\varphi(\sigma)$ vérifie l'équation

$$\varphi(\sigma) = \int_{(S_1)} l_n(\sigma, 1)\,\varphi(\sigma_1)\,d\sigma_1.$$

Or, on a

$$l_n(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} k_n(0, 1)\,d\sigma;$$

la fonction $k_n(0, 1)$ étant une fonction bornée et continue des points (x) et (x_1), on peut appliquer le théorème du § 8 (2) et obtenir l'égalité

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)}\left(\int_{(S_1)} k_n(0, 1)\,\varphi(\sigma_1)\,d\sigma_1\right)d\sigma = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \varphi(x)\,d\sigma,$$

ayant posé

$$\varphi(x) = \int_{(S_1)} k_n(0, 1)\,\varphi(\sigma_1)\,d\sigma_1.$$

La substitution de cette valeur de $\varphi(x)$ dans l'équation (43') donne, la fonction $\varphi(x)$ étant bornée que

$$\frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \varphi(x)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{(S_1)}\left(\int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma\right)\varphi(\sigma_1)\,d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{(\sigma)}\left(\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\left(\frac{1}{\sigma_1}\int_{(\sigma_1)} \varphi(x_1)\,d\sigma_1\right)d\sigma_1\right)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{(\sigma)}\left(\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\,\varphi(x_1)\,d\sigma_1\right)d\sigma.$$

Les fonctions du point (x) sous les signes des intégrales étant continues, on en conclut que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\,\varphi(x_1)\,d\sigma_1, \tag{43}$$

c'est-à-dire que $\varphi(x)$ est la fonction du lemme 1.

Si $\varphi(x) = C$, on a évidemment

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} C\, d\sigma = C.$$

De même, en appliquant le procédé d'itération à l'équation (44′), on obtient

$$\varphi(\sigma) = (-1)^n \int\limits_{(S_1)} l_n(\sigma, 1)\, \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

d'où on conclut, en répétant textuellement les raisonnements que

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \varphi(x)\, d\sigma,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction qui vérifie l'équation (44).

9. Nous sommes maintenant en état de démontrer le théorème sur l'unicité de la solution du problème de Neumann, qui a été formulé dans le § 13 (6).

Supposons, qu'une fonction moyenne à variation bornée $u(\sigma)$ étant donnée sur (S), il existe, outre la solution trouvée suivant les règles du § 11 (6), une autre fonction harmonique w, qui résout le problème intérieur de Neumann pour la même fonction $u(\sigma)$ et qui est représentable par la formule

$$w = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma_1^{(i)}(w)\, d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} w^{(i)}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \tag{45}$$

la fonction $w^{(i)}(\sigma)$ étant continue.

Comme le potentiel de simple couche, trouvé dans le § 11 (6), est représentable par la formule (45), on a

$$V = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma_1^{(i)}(V)\, d\sigma_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} V^{(i)}(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \tag{45′}$$

$\sigma^{(i)}(V)$ étant le flux relatif en cas, quand $u(\sigma)$ n'est pas continue.

Comme on a

$$\sigma^{(i)}(w) = \sigma^{(i)}(V) = u(\sigma)$$

on a dans les points intérieurs de $(D^{(i)})$:

$$w - V = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \left(w^{(i)}(\sigma_1) - V^{(i)}(\sigma_1)\right) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 .$$

Comme la fonction $w^{(i)}(\sigma)$ est continue suivant notre supposition et la fonction $V^{(i)}(\sigma)$ est absolument continue suivant les théorèmes du § 11 (5), il suit de là d'après le théorème du § 14 (5) que

$$V^{(i)}(\sigma) - w^{(i)}(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \left(V^{(i)}(\sigma_1) - w^{(i)}(\sigma_1)\right) l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 +$$
$$+ \frac{2\pi}{4\pi}\left(V^{(i)}(\sigma) - w^{(i)}(\sigma)\right)$$

ou

$$V^{(i)}(\sigma) - w^{(i)}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} \left(V^{(i)}(\sigma_1) - w^{(i)}(\sigma_1)\right) l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 =$$
$$= \int\limits_{(S_1)} \left(V^{(i)}(\sigma_1) - w^{(i)}(\sigma_1)\right) l_1(\sigma, 1)\, d\sigma_1 .$$

L'équation obtenue par nous n'étant pas distincte de l'équation (**43'**) on en conclut que

$$w^{(i)}(\sigma) = V^{(i)}(\sigma) + C, \quad \text{resp.} \quad w^{(i)}(\sigma) = V^{(i)}(\sigma) + C^{(l)}$$

et que dans l'intérieur de $(D^{(i)})$

$$w = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma_1^{(i)}(V)}{r_{10}}\, d\sigma_1 +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} V^{(i)}(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 + C, \text{ resp. } + C^{(l)}, \qquad l=1, 2, \ldots k.$$
$$w = V + C, \text{ resp. } w = V + C^{(l)},$$

c'est-à-dire que w est parmi les solutions que nous avons trouvées.

De même, dans le cas du problème extérieur, la supposition qu'on a une solution pour laquelle

$$w = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \sigma^{(e)}(w)\,\frac{d\sigma_1}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} w^{(e)}(\sigma_1)\,\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1$$

et $w^{(e)}(\sigma)$ est continue, conduit à la conclusion que

$$V^{(e)}(\sigma) - w^{(e)}(\sigma) = -\int\limits_{(S_1)} \left(V^{(e)}(\sigma_1) - w^{(e)}(\sigma_1)\right) l_1(\sigma, 1)\, d\sigma_1.$$

La dernière équation n'étant pas distincte de l'équation (44') on en conclut que dans le cas ordinaire et dans le cas (E): $w^{(e)}(\sigma) = V^{(e)}(\sigma)$; dans le cas (I) la différence $w^{(e)}(\sigma) - V^{(e)}(\sigma)$ est égale à zéro sur $(S^{(0)})$ et à une constante $C^{(l)}$ sur la frontière intérieure $(S^{(l)})$.

On en conclut que dans le cas ordinaire et dans le cas (E): $w = V$; dans le cas (I) on a dans l'intérieur du domaine, limité par $(S^{(l)})$:

$$w = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\sigma^{(e)}(V)}{r_{10}}\, d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} V^{(e)}(\sigma)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 + C^{(l)} = V + C^{(l)},$$

la normale à $(S^{(l)})$ étant dirigée vers l'intérieur du domaine que nous considérons.

10. Revenons maintenant au problème de Dirichlet. D'après les formules (11) et (34):

$$(34) \qquad \vartheta(\sigma) = \frac{D_2(\sigma, \xi)}{D_2(\xi)} = \vartheta_0(\sigma) + \vartheta_1(\sigma) + \xi^2 \vartheta_2(\sigma) + \cdots;$$

il nous reste d'établir sous quelle condition, dans le cas du problème extérieur, $\xi = 1$ n'est pas un pôle de la fonction (34) et, dans le cas (I) et du problème intérieur $\xi = -1$ n'est pas son pôle.

Commençons par l'étude du pôle $\xi = 1$. Comme le cas ordinaire n'est qu'un cas particulier du cas (E) il suffit d'envisager le cas (E) et le cas (I).

Désignons par

$$\rho^{(1)}(x),\ \rho^{(2)}(x),\ \ldots\ \rho^{(k)}(x)$$

les k fonctions fondamentales, introduites dans le § 7. Dans le cas (I) il existe une seule fonction fondamentale attachée au nombre caractéristique $\xi = 1$. Désignons la par ρ, ayant posé

$$\int\limits_{(S)} \rho\, d\sigma = 1.$$

Ayant remarqué que la substitution de (34) dans l'équation (10) conduit à l'équation

$$D_2(\sigma, \xi) = \xi \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1) D_2(\sigma, \xi) d\sigma_1 + D_2(\xi) u(\sigma), \tag{47}$$

multiplions la par $\rho^{(\lambda)}(x)$ dans le cas (E) ou par ρ dans le cas (I) et intégrons sur (S). En remarquant que

$$\int_{(S)} \rho^{(\lambda)}(0) \left(\int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1) D_2(\sigma_1, \xi) d\sigma_1 \right) d\sigma =$$

$$= \int_{(S_1)} D_2(\sigma_1, \xi) \left(\int_{(S)} l_1(\sigma, 1) \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma \right) d\sigma_1$$

et que

$$\int_{(S)} l_1(\sigma, 1) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \rho^{(\lambda)} d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos(r_{01} N_1)}{r_{10}^2} \rho^{(\lambda)} d\sigma_1 = \int_{(S)} k_1(0, 1) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \rho^{(\lambda)}(x_1),$$

nous obtenons

$$(1 - \xi) \int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \rho^{(\lambda)} d\sigma = D_2(\xi) \int_{(S)} u(\sigma) \rho^{(\lambda)} d\sigma$$

(48) respectivement

$$(1 - \xi) \int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \rho \, d\sigma = D_2(\xi) \int_{(S)} u(\sigma) \rho^{(\lambda)} d\sigma.$$

Il suit de là, en premier lieu, que si les conditions

$$\int_{(S)} u(\sigma) \rho^{(\lambda)} d\sigma = 0, \quad \text{resp.} \int_{(S)} u(\sigma) \rho \, d\sigma = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \dots k. \tag{49}$$

sont satisfaites, on a pour toutes les valeurs de ξ

$$\int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \rho^{(\lambda)} d\sigma = 0, \quad \text{resp.} \int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \rho \, d\sigma = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots k, \tag{50}$$

la fonction $D_2(\sigma, \xi)$ étant une fonction entière de ξ.

En second lieu, si $\xi = 1$ est une racine de $D_2(\xi)$, on a

$$D_2(\sigma, 1) = \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1) D_2(\sigma, 1) d\sigma_1.$$

Suivant le lemme 1 du § 8, on a donc
$D_2(\sigma, 1) = C^{(l)}$ sur $(S^{(l)})$, resp. $D_2(\sigma, 1) = C$, sur (S).

En substituant la valeur trouvée dans (50) après y avoir posé $\xi = 1$, nous obtenons

$$\int_{(S)} D_2(\sigma, 1) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \rho^{(\lambda)} d\sigma = C^{(\lambda)} = 0, \quad \text{resp. } C = 0. \quad \lambda=1, 2, \dots k,$$

On en conclut que $D_2(\sigma, 1) = 0$, ce qui est impossible, la fraction (34) étant réduite. Il suit de tout cela, que $\xi = 1$ n'est pas la racine de $D_2(\xi)$, si les conditions (49) sont satisfaites.

En s'occupant du pôle $\xi = -1$ dans le cas (I), désignons par

$$\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(k)}$$

les fonctions fondamentales introduites dans le § 7.

En multipliant l'égalité (47) par $\psi^{(\lambda)}$ et en l'intégrant sur (S), nous obtenons

$$(1 + \xi) \int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \psi^{(\lambda)} d\sigma = D_2(\xi) \int_{(S)} u(\sigma) \psi^{(\lambda)} d\sigma,$$

car, cette fois,

$$\int_{(S)} l_1(\sigma, 1) \psi^{(\lambda)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \psi^{(\lambda)} d\sigma = \int_{(S)} k_1(0, 1) \psi^{(\lambda)} d\sigma = -\psi^{(\lambda)}(x_1).$$

Donc, si les k conditions

$$(49') \qquad \int_{(S)} u(\sigma) \psi^{(\lambda)} d\sigma = 0, \qquad \lambda=1, 2, \dots k.$$

sont satisfaites, on a, la fonction $D_2(\sigma, \xi)$ étant une fonction entière de ξ,

$$(50') \qquad \int_{(S)} D_2(\sigma, \xi) \psi^{(\lambda)} d\sigma = 0, \qquad \lambda=1, 2, \dots k.$$

D'un autre côtè, si $\xi = -1$ est une racine de la fonction $D(\xi)$, on a

$$D_2(\sigma, -1) = -\int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1) D_2(\sigma_1, -1) d\sigma_1.$$

Il suit de là, d'après le lemme 2, que $D_2(\sigma, -1)$ est égale à zéro sur $(S^{(0)})$ et est égale à une constante $C^{(\lambda)}$ sur chaque frontière intérieure $(S^{(\lambda)})$.

En supposant que dans (50′) $\xi = -1$ et en y substituant la valeur trouvée de $D_2(\sigma, -1)$, on obtient

$$\int_{(S)} D_2(\sigma, -1)\psi^{(\lambda)} d\sigma = \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \psi^{(\lambda)} d\sigma = C^{(\lambda)} = 0.$$

La fonction $D_2(\sigma, -1)$ est donc identiquement nulle, ce qui est impossible, la fraction (34) étant réduite. Donc, si les conditions (50′) sont satisfaites, $\xi = -1$ n'est pas le pôle de la fraction (34).

11. Les théorèmes du paragraphe précédent conduisent immédiatement à la solution du problème de Dirichlet, mais dans quelques cas sous certaines conditions suplémentaires.

Supposons que la fonction $u(\sigma)$ est continue.

Les problèmes intérieurs. Dans le cas ordinaire et dans le cas (E) $\xi = -1$ n'est pas le pôle de la fonction $\vartheta(\sigma)$, définie par la serie

(11) $$\vartheta(\sigma) = u(\sigma) + \xi\vartheta_1(\sigma) + \xi^2\vartheta_2(\sigma) + \cdots,$$

où

$$\vartheta_m(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} l(\sigma, 1)\vartheta_{m-1}(\sigma_1) d\sigma_1.$$

Le nombre $\xi = 1$ peut être son pôle; mais si $\xi = 1$ est le pôle de la fonction (11), c'est un pôle simple.

Il suit de là que le rayon de convergence de la série

$$(1-\xi)\vartheta(\sigma) = u(\sigma) + \xi(\vartheta_1(\sigma) - u(\sigma)) + \xi^2(\vartheta_2(\sigma) - \vartheta_1(\sigma)) + \cdots$$

surpasse l'unité et que la fonction $\vartheta(\sigma)$, donnée par la série

(51) $$\vartheta(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{u(\sigma) - (\vartheta_1(\sigma) - u(\sigma)) + (\vartheta_2(\sigma) - \vartheta_1(\sigma)) - \cdots\right\}$$

est la valeur de la fonction (11) pour $\xi = -1$.

En résolvant le problème intérieur dans le cas (*I*) nous supposerons que les conditions

$$(49'') \qquad \int\limits_{(S)} u(\sigma)\,\psi^{(\lambda)}\,d\sigma = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots k$$

sont satisfaites. Dans ce cas $\xi = -1$ n'est pas le pôle de la fonction (11) et la solution du problème est de nouveau donnée par la série (51).

Les problèmes extérieurs. En s'occupant du cas ordinaire et du cas (*I*), nous supposerons que la condition

$$(49'') \qquad \int\limits_{(S)} u(\sigma)\,\rho\,d\sigma = 0$$

est satisfaite; dans le cas (*E*) nous substituons à la place de la condition (49′) les *k* conditions

$$(49) \qquad \int\limits_{(S)} u(\sigma)\,\rho^{(\lambda)}\,d\sigma = 0. \qquad \lambda = 1, 2 \dots k.$$

Si les conditions mentionnées sont satisfaites, $\xi = 1$ n'est pas le polê de la fonction (11). Le nombre $\xi = -1$ pouvant être dans le cas (*I*) son pôle simple, le rayon de convergence de la série

$$(1+\xi)\,\vartheta(\sigma) = u(\sigma) + \xi\left(\vartheta_1(\sigma) + u(\sigma)\right) + \xi^2\left(\vartheta_2(\sigma) + \vartheta_1(\sigma)\right) + \cdots$$

surpasse l'unité et la valeur de la fonction (11) pour $\xi = 1$ est donnée par la série

$$(52) \qquad \vartheta(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{u(\sigma) + \left(\vartheta_1(\sigma) + u(\sigma)\right) + \left(\vartheta_2(\sigma) + \vartheta_1(\sigma)\right) + \cdots\right\}$$

Or, nous avons remarqué dans le § 6, que si $r_m(\sigma)$ est le terme complémentaire de la série (11), on a

$$|r_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

N étant un nombre indépendant de (σ); les termes complémentaires des séries $(1+\xi)\,\vartheta(\sigma)$ et $(1-\xi)\,\vartheta(\sigma)$ jouissent de la même propriété. Soit

donc $\rho_m(\sigma)$ le terme complémentaire d'une des séries (51), (52) et $s_m(\sigma)$ la somme de ses m premiers termes. On a

$$|\rho_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m \geqq N,$$

où N est indépendant de (σ).

Soit (σ_0) un domaine arbitraire, soit (σ) un domaine contenu dans (σ_0). On a, par suite

$$|\vartheta(\sigma_0) - \vartheta(\sigma)| \leqq |s_m(\sigma_0) - s_m(\sigma)| + 2\varepsilon,$$

d'où il suit que la fonction $\vartheta(\sigma)$ est continue, si $s_m(\sigma)$ est continue, et même absolument, si $s_m(\sigma)$ est absolument continue.

Or, les fonctions $\vartheta_m(\sigma)$ étant absolument continues, $s_m(\sigma)$ est continue, respectivement absolument continue, si $u(\sigma)$ est continue, respectivement absolument continue.

Donc si la fonction $u(\sigma)$ est continue, la fonction $\vartheta(\sigma)$ l'est aussi. Formons maintenant le potentiel

$$w = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \tag{53}$$

La densité $\vartheta(\sigma)$ étant continue, on a

$$w^{(i)}(\sigma) + w^{(e)}(\sigma) = 2w(\sigma) = \frac{2}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} l(\sigma, 1)\vartheta(\sigma_1) d\sigma_1 = 2\xi\vartheta(\sigma) - 2\xi u(\sigma),$$

$$\xi = \pm 1; \quad w^{(i)}(\sigma) - w^{(e)}(\sigma) = 2\vartheta(\sigma)$$

d'où il suit:

$$\text{si } \xi = -1: w^{(i)}(\sigma) = u(\sigma);$$
$$\text{si } \xi = 1, \quad w^{(e)}(\sigma) = -u(\sigma).$$

Le potentiel (53) résout donc le problème (B) sous les conditions (49). Les séries (51) et (52) étant uniformément convergentes sur (S), on peut intégrer terme à terme la série, qu'on obtient en substituant dans (53) à la place de $\vartheta(\sigma)$ la valeur qui est obtenue pour elle.

On obtient donc pour les problèmes intérieurs:

(54) $$w = \frac{1}{2}\left\{w_1 - (w_2 - w_1) + (w_3 - w_2) - \cdots\right\}$$

et pour les problèmes extérieurs

(55) $$w = -\frac{1}{2}\left\{w_1 + (w_2 + w_1) + (w_3 + w_2) + \cdots\right\}$$

où

$$w_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} w_{k-1}\,(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1, \qquad w_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1.$$

Remarque. Si la densité $u(\sigma)$ n'est pas continue, les formules de ce paragraphe donnent la solution du problème (B) généralisé, qui est mentionné dans le § 2.

12. Les conditions (49) sont tout à fait étrangères au problème de Dirichlet; mais elles sont indispensables, quand on résout le problème (B).

Théorème. Quel que soit le potentiel de double couche

(56) $$W = \int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1,$$

si $W^{(e)}(\sigma)$ est la valeur relative de la moyenne de W sur (σ) du côté extérieur de (S), on a dans le cas ordinaire et dans le cas (I)

(57) $$\int\limits_{(S)} W^{(e)}(\sigma)\,\rho(0)\,d\sigma = 0;$$

dans le cas (E) on a

(57′) $$\int\limits_{(S)} W^{(e)}(\sigma)\,\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = 0, \qquad \lambda=1,2,\ldots k.$$

De même, si l'on affaire avec le cas (I) et si $W^{(i)}(\sigma)$ est la valeur relative de W sur (σ) du côté intérieur de (S), on a

(57″) $$\int\limits_{(S)} W^{(i)}(\sigma)\,\psi^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = 0, \qquad \lambda=1,2,\ldots k.$$

Pour démontrer le théorème il suffit d'évaluer les quantités dans les parties gauches des égalités (57), (57'), (57'').

Nous avons, par exemple,

$$\int\limits_{(S)} W^{(e)}(\sigma)\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(S)}\Big(\int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\,l(\sigma, 1)\,d\sigma_1\Big)\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma - 2\pi\int\limits_{(S)}\vartheta(\sigma)\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = 0,$$

car

$$\int\limits_{(S)}\Big(\int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\,l(\sigma, 1)\,d\sigma_1\Big)\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\Big(\int\limits_{(S)}\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma\Big)\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma\Big)\,d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\Big(\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma\Big)\,d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\Big(-\int\limits_{(S)}\frac{\cos(r_{01}N_1)}{r_{10}^2}\rho^{(\lambda)}(0)\,d\sigma\Big)\,d\sigma_1 = 2\pi\int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\rho^{(\lambda)}(1)\,d\sigma_1.$$

De même on trouve dans le cas (I)

$$\int\limits_{(S)} W^{(i)}(\sigma)\psi^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = \int\limits_{(S)}\Big(\int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\,l(\sigma, 1)\,d\sigma_1\Big)\psi^{(\lambda)}(0)\,d\sigma +$$

$$+ 2\pi\int\limits_{(S)}\vartheta(\sigma)\psi^{(\lambda)}(0)\,d\sigma = 0,$$

la première intégrale dans la partie droite étant égale à

$$-2\pi\int\limits_{(S_1)}\vartheta(\sigma_1)\psi^{(\lambda)}(1)\,d\sigma_1.$$

Il suit de là, que la résolution du problème (B) est impossible, si les conditions (49) ne subsistent pas.

13. Nous avons complètement résolu dans le § 11 le problème intérieur (A) dans le cas ordinaire et dans le cas (E). Pour le résoudre dans le

cas (I) il reste à se débarrasser de la condtion (49'). Introduisons une fonction α des points sur (S), qui est égale à zéro, si le point est sur $(S^{(0)})$ et qui est égale à α_l, si le point est sur $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots k$, α_l étant des constantes:

$$\alpha = 0, \text{ sur } (S^{(0)}), \quad \alpha = \alpha_l, \text{ sur } (S^{(l)}), \qquad l=1,2, \ldots k;$$

choisissons les nombres α_l de manière, que la fonction $u(\sigma) - \alpha$ satisfasse aux conditions (49'). Comme sur $(S^{(0)})$ $\alpha = 0$, il faut qu'on ait

$$\int_{(S)} (u(\sigma) - \alpha)\psi^{(\lambda)} d\sigma = \int_{(S)} u(\sigma)\psi^{(\lambda)} d\sigma - \sum_{l=1}^{l=k} \alpha_l \int_{(S^{(l)})} \psi^{(l)} d\sigma = \int_{(S)} u(\sigma)\psi^{(\lambda)} d\sigma - \alpha_\lambda = 0.$$

Formons, suivant les règles du § 11 la solution du problème, en remplaçant la fonction $u(\sigma)$ par la fonction $u(\sigma) - \alpha$.

Nous obtenons

$$W = \frac{1}{2}\left\{W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \cdots\right\}, \quad W^{(i)}(\sigma) = u(\sigma) - \alpha,$$

où

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} (u(\sigma) - \alpha)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad W_n = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} W_{n-1}(\sigma)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Mais, comme le point (x), étant dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, est en dehors de tous les domaines limités par les surfaces $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots k$, on a, pour les points (x) dans l'intérieur de $(D^{(i)})$:

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} u(\sigma)\cdot\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma - \sum_{l=1}^{l=k} \alpha_l \int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} u(\sigma)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = w_1.$$

On trouve, de même, que si le point (x) est sur $(S^{(\lambda)})$, on a

$$W_1(\sigma) = w_1(\sigma) + \alpha_\lambda,$$

car

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1^{(l)})} l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{(S_1^{(l)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma = -1,$$

si (x) est sur $(S^{(l)})$ et est égale à zéro dans le cas contraire, la normale à $(S^{(l)})$ étant dirigée vers l'intérieur du domaine limité par $(S^{(l)})$.

Il suit de là que si (x) est sur (S), on a

$$W_1(\sigma) = w_1(\sigma) + \alpha.$$

En continuant ainsi, nous concluons pas à pas que

$$W_2 = w_2, \quad W_2(\sigma) = w_2(\sigma) - \alpha, \quad W_3 = w_3, \quad W_3(\sigma) = w_3(\sigma) - \alpha, \ldots$$

Il suit de là que pour les points (x), situés dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, la série (54) est convergente, mais que sa somme vérifie la condition

$$w^{(i)}(\sigma) = u(\sigma) - \alpha.$$

Choisissons maintenant les nombres

$$\gamma_1, \; \gamma_2, \; \ldots \; \gamma_k$$

de manière, qu'on ait sur $(S^{(\lambda)})$:

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \int_{(S_1)} \frac{\psi^{(l)} d\sigma_1}{r_{10}} = \alpha_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k. \tag{58}$$

Cela est toujours possible. Nous savons, en effet, que les potentiels

$$\int_{(S_1)} \frac{\psi^{(l)} d\sigma_1}{r_{10}} \tag{59}$$

sont égaux aux constantes dans tous les domaines qui sont extérieurs à $(D^{(i)})$. Ayant posé que (59) est égal à $C_l^{(\lambda)}$ dans l'intérieur de $(S^{(\lambda)})$ et se rappelant que (59) est égal à zéro en dehors de $(S^{(0)})$, étant égal à zéro à l'infini, nous concluons que les équations (58) sont équivalentes aux équations

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l C_l^{(\lambda)} = \alpha_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k.$$

Le dernier système a une solution pour chaque choix des α_λ; autrement le système

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l C_l^{(\lambda)} = 0, \qquad \lambda=1, 2, \ldots k$$

aurait une solution, dans laquelle un des nombres $\delta_1, \ldots \delta_k$ serait différent de zéro; mais alors le potentiel

$$\int_{(S_1)} \sum_{l=k}^{l=k} \delta_l \psi^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

serait égale à zéro dans tous les domaines extérieurs pour $(D^{(i)})$ et par conséquent il sérait égal à zéro partout, d'où il suit que

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \psi^{(l)} = 0,$$

ce qui est impossible, les fonctions $\psi^{(l)}$ étant linéairement indépendantes.

Posons maintenant

$$V_0 = \int_{(S_1)} \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \psi^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

et formons la fonction

$$V = w + V_0.$$

Nous avons

$$V^{(i)}(\sigma) = w^{(i)}(\sigma) + V_0^{(i)}(\sigma) = u_1'(\sigma) - \alpha + \alpha = u(\sigma),$$

car $V_0^{(i)}(\sigma)$ est égale à α, la valeur de V_0 sur (S) étant égale à α.

Il suit de là que la fonction V résout le problème posé; la solution du problème de Dirichlet est donnée dans ce cas par une somme d'un potentiel de double couche et d'un potentiel de simple couche.

Passons maintenant aux problèmes extérieurs. Le cas ordinaire n'est qu'un cas particulier du cas (E), le nombre k des fonctions fondamentales, attachées au nombre caractéristique $\xi = 1$ y étant égal à l'unité; le cas (I) est tout à fait analogue au cas ordinaire, — le nombre des fonctions fonda-

mentales attachées au $\xi = 1$ est égal aussi à l'unité. A cause de cela nous discuterons en détail le cas (E).

Supposons que α est une fonction des points sur (S), qui est égale à une constante sur chaque frontière $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots k$

$$\alpha = \alpha^{(l)}, \text{ sur } (S^{(l)});$$

α est une simple constante dans les cas ordinaire et (I). Choisissons les constantes $\alpha^{(l)}$ de manière que les conditions (49), (49″) soient satisfaites pour la fonction $u(\sigma) - \alpha$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\int_{(S)} (u(\sigma) - \alpha)\, \rho^{(\lambda)}\, d\sigma = \int_{(S)} u(\sigma)\, \rho^{(\lambda)}\, d\sigma - \sum_{l=1}^{l=k} \alpha^{(\lambda)} \int_{(S)} \rho^{(\lambda)}\, d\sigma =$$

$$= \int_{(S)} u(\sigma)\, \rho^{(\lambda)}\, d\sigma - \alpha^{(\lambda)} = 0.$$

Supposons, que W est la solution du problème (B), qui correspond à la fonction $u(\sigma) - \alpha$. Nous avons, en appliquant la formule (55)

$$W = -\frac{1}{2}\left\{ W_1 + (W_2 + W_1) + (W_3 + W_2) + \cdots \right\}, \tag{60}$$

ùo

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} (u(\sigma_1) - \alpha)\, \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1, \\ W_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} W_{n-1}(\sigma_1)\, \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1. \end{aligned} \tag{61}$$

La première des égalités (61) donne, le point (x) étant en dehors des surfaces $(S^{(l)})$:

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} u(\sigma_1)\, \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 - \sum_{l=1}^{l=k} \alpha^{(l)} \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1^{(l)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} u(\sigma_1)\, \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 = w_1.$$

De même on trouve pour les points situés sur $(S^{(l)})$

$$W_1(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\, l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 - \alpha_\lambda = w_1(\sigma) - \alpha_\lambda,$$

car

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S^{(0)})} l(\sigma, 1)\, d\sigma_1 = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}\, N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1\right) d\sigma = 1,$$

si (x) est sur $(S^{(l)})$, et est égale à zéro dans le cas contraire, ce qui montre, que si (x) est sur (S)

$$w_1(\sigma) = W_1(\sigma) - \alpha.$$

En continuant ainsi pas à pas, nous obtenons

$$W_2 = w_2,\quad W_2(\sigma) = w_2(\sigma) - \alpha;\quad W_3 = w_3,\quad W_3(\sigma) = w_3(\sigma) - \alpha, \ldots$$

Il suit de là que les séries (60) et (55) ne se diffèrent pas entre elles pour les points dans $(D^{(e)})$, mais que la somme de la série (55) vérifie la condition

$$u^{(e)}(\sigma) = u(\sigma) + \alpha.$$

Chaque potentiel

(62) $$\int\limits_{(S_1)} \frac{\rho^{(l)}\, d\sigma_1}{r_{10}}, \qquad l = 1, 2, \ldots k$$

est égal à une constante dans l'intérieur de chacune des surfaces $(S^{(l)})$ (dans le cas (I) le potentiel (62), qui est unique, est égal à une constante dans $(D^{(i)})$). Supposons que le potentiel (62) est égal à $C_l^{(\lambda)}$ dans l'intérieur de $(S^{(\lambda)})$, (égal à C dans $(D^{(i)})$ dans le cas (I)).

On peut choisir les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ de manière que les égalités

$$\text{sur } (S^{(\lambda)}):\ \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \int\limits_{(S_1)} \frac{\rho^{(\lambda)}\, d\sigma_1}{r_{10}} = \alpha_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k$$

qui sont equivalentes aux égalités

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l\, C_l^{(\lambda)} = \alpha_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots k$$

soient satisfaites. Autrement, qu'il existe des nombres $\delta_1, \ldots \delta_k$, tels que l'on ait

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l C_l^{(\lambda)} = 0, \qquad \lambda=1, 2, \ldots k$$

et qui ne soient tous égaux à zéro simultanément. Mais alors le potentiel

$$\int_{(S_1)} \sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \rho^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

serait égal à zéro dans $(D^{(i)})$, ce qui exigerait

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \rho^{(l)} = 0;$$

or, la dernière égalité est impossible, les fonctions $\rho^{(\lambda)}$ étant linéairement indépendantes. Posons

$$V_0 = \int_{(S_1)} \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \rho^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

et

$$V = - V_0 + w.$$

La valeur de V_0 sur (S) étant égale à α, on a $V_0^{(e)}(\sigma) = \alpha$ et

$$V^{(e)}(\sigma) = - V_0^{(e)}(\sigma) + w^{(e)}(\sigma) = - \alpha + u(\sigma) + \alpha = u(\sigma),$$

d'où suit que la fonction V résout le problème posé.

La solution du problème (A) est de nouveau donnée par une somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche.

14. Supposons maintenant que $u(\sigma)$ est absolument continue. Supposons que $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$, qui est sommable dans le sens de M. Lebesgue.

Supposons que la fonction $f(x)$ est continue au point (x_0), c'est-à-dire, que, quel que soit ε, on peut construire une sphère du rayon r_ε, ayant le centre dans (x_0) telle que

(63) $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

si (x) est sur (r_ε), (r_ε) étant la portion découpée de (S) par cette sphère. Pour une portion (r_0), correspondante à une sphère d'un certain rayon r_0, on a

$$|f(x)-f(x_0)|<1.$$

La fonction $f(x)$ est bornée sur (r_0) et M_ε, m_ε étant les bornes de la fonction $f(x)$ sur (r_ε), on a

(64) $f(x_0)\leqq M_\varepsilon < f(x_0)+2\varepsilon,\quad f(x_0)-2\varepsilon < m_\varepsilon \leqq f(x_0),\quad M_\varepsilon - m_\varepsilon < 4\varepsilon.$

En répétant les raisonnements du § 12 (6), on peut démontrer pas à pas que les fonctions

(65) $$\vartheta_1(\sigma),\ \vartheta_2(\sigma),\ \ldots,\ \vartheta_n(\sigma),$$

n étant quelconque, sont les fonctions moyennes des fonctions sommables sur (S), qui sont toutes continues dans une portion (σ'), contenue dans l'intérieur de (r_0).

Ayant posé, par exemple,

$$\vartheta_1(\sigma)=\int\limits_{(S_1-r_0)}\left(\frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma\right)u(\sigma_1)\,d\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_{(r_0)}f(x_1)\left(\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma\right)d\sigma_1$$

on voit, que (σ) étant la portion de (σ'), on peut intervertir l'ordre de l'intégration dans chacune des deux intégrales; dans la seconde, parce que l'intégrale

$$\int\limits_{(r_0)}U(\sigma_1)\frac{|\cos(r_{10}N_0)|}{r_{10}^2}d\sigma_1$$

est convergente, $u(\sigma_1)$ étant bornée dans (r_0); dans la première, parce que le point (x) étant sur (σ'), $\frac{1}{r_{10}^2}$ est borné. La fonction $\vartheta_1(\sigma)$ est donc pour les valeurs choisies de (σ) la moyenne de la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-r_0)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}u(\sigma_1)\,d\sigma_1+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(r_0)}f(x_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1$$

qui est continue sur (σ') et bornée sur une portion (r_0'), contenue dans (r_0). Puis, en étudiant la série qui donne $\vartheta(\sigma)$, on peut prendre pour le premier terme $u(\sigma)$; le terme complémentaire $r_m(\sigma)$ de cette série répond à la condition

$$|r_m(\sigma)| < \varepsilon,$$

si

$$m > N,$$

le nombre N étant indépendant du choix de (σ).

Soit $\Sigma_m(\sigma)$ la somme des m premiers termes de la série; tous les termes de $\Sigma_m(\sigma)$, excepté le premier, sont les moyennes des fonctions continues sur une portion (σ^*), qui contient le point (x_0). Si (σ) appartient à (σ^*), on a

$$\Sigma_m(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} f(x)\, d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \theta(x)\, d\sigma,$$

la fonction $\theta(x)$ étant continue sur (σ^*), d'où suit que dans (σ^*) $\Sigma_m(\sigma)$ est la moyenne de la fonction

$$\Phi(x) = f(x) + \theta(x),$$

qui est continue au point (x_0).

Les raisonnements du § 12 (6) qui suivent, étant indépendants de la signification de $\Sigma_m(x)$, $\Phi(x)$, $\vartheta(\sigma)$, étaient basés seulement sur les propriétés de ces fonctions, qui sont établies; on en conclut que la fonction $\underline{\vartheta(x)}$ est continue au point (x_0).

On a donc, (σ_0) etant une portion de (S) contenant le point (x_0):

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1-\sigma_0)} \vartheta(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{(\sigma_0)} \underline{\vartheta(x_1)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1,$$

$\underline{\vartheta(x)}$ étant continue au point (x_0).

Le théorème de Liapounoff montre maintenant qu'on a au point (x_0):

$$w_i = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1-\sigma_0)} \vartheta(\sigma_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{(\sigma)} \underline{\vartheta(x_1)}\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 + \vartheta(x_0),$$

la demonstration du théorème étant basée sur le seul fait, qu'on peut faire la différence

$$|\vartheta(x) - \vartheta(x_0)|$$

moindre qu'un nombre donné ε.

Le potentiel de simple couche V_0, qui entre dans nos formules, est une fonction continue de (x) dans tout l'espace.

En donnant à l'égalité

$$\int\limits_{(S_1)} \vartheta(\sigma_1) l_1(\sigma, 1) d\sigma_1 + V_0(\sigma) + \vartheta(\sigma) = u(\sigma)$$

la forme

$$\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \vartheta(\sigma_1) l_1(\sigma, 1) d\sigma_1 + \int\limits_{(\sigma_0)} \vartheta(\sigma_1) l_1(\sigma, 1) d\sigma_1 + V_0(\sigma) + \vartheta(\sigma) = u(\sigma),$$

on peut la transformer, (σ) étant dans l'interieur de (σ_0), en

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)}\left(\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\vartheta(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)}\left(\int\limits_{(\sigma_0)} \vartheta(x_1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \vartheta(x)\, d\sigma + V_0(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f(x)\, d\sigma$$

d'où l'on conclut, en faisant tendre (σ) vers zéro, qu'au point (x_0):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1-\sigma_0)} \frac{\vartheta(\sigma_1)\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma_0)} \vartheta(x)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \vartheta(x_0) + V_0 = f(x_0)$$

c'est-a-dire, qu'au point (x_0):

$$V_i = f(x_0).$$

Nous avons ainsi: si la fonction $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ sommable sur (S), dans chaque point (x_0) où $f(x)$ est continue, la fonction V, trouvée par nous dans les paragraphes précédents, résout le problème de Dirichlet pour la fonction $f(x)$ en sens ordinaire.

15. Revenons maintenant au problème général en nous bornant, pour fixer les idées, en premier lieu au problème intérieur dans le cas ordinaire et dans le cas (E).

En utilisant les formules du § 3 nous avons, $u(\sigma)$ étant une fonction additive et à variation bornée:

$$\vartheta_0(\sigma) = u(\sigma), \quad \vartheta_1(\sigma) = \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\, u(\sigma_1)\, d\sigma_1, \quad \vartheta_2(\sigma) = \\ = \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\, \vartheta_1(\sigma_1)\, d\sigma_1, \ldots$$

Or, on a, en appliquant le théorème du § 9 (2):

$$\vartheta_2(\sigma) = \int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1) \left(\int_{(S_2)} l_1(\sigma_1, 2)\, u(\sigma_2)\, d\sigma_2 \right) d\sigma_1 = \\ = \int_{(S_2)} u(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} l_1(\sigma, 1)\, l_1(\sigma_1, 2)\, d\sigma_1 \right) d\sigma_2 = \int_{(S_2)} u(\sigma_2)\, l_2(\sigma, 2)\, d\sigma_2 .$$

En continuant ainsi on trouve

$$\vartheta_2(\sigma) = \int_{(S_1)} u(\sigma_1)\, l_2(\sigma, 1)\, d\sigma_1, \ldots, \vartheta_k(\sigma) = \int_{(S_1)} u(\sigma_1)\, l_k(\sigma, 1)\, d\sigma_1 \ldots$$

Si le point (x) est dans l'intérieur du domaine, le facteur $\dfrac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}$ est continue et borné; on a donc

$$w_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_{k-1} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \left(\int_{(S_2)} u(\sigma_2)\, l_{k-1}(\sigma_1, 2)\, d\sigma_2 \right) d\sigma_1 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_2)} u(\sigma_2) \left(\int_{(S_1)} \frac{l_{k-1}(\sigma_1, 2) \cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\, d\sigma_1 \right) d\sigma_2 .$$

En appliquant maintenant la formule (54) du § 11, nous obtenons:

(66) $$w(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\,d\sigma_2 - \right.$$

$$-\left(\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\left[\int\limits_{(S_1)}\frac{l_1(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 - \frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\right]d\sigma_2\right) +$$

$$\left. + \left(\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\left[\int\limits_{(S_1)}\frac{l_2(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 - \int\limits_{(S_1)}\frac{l_1(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1\right]d\sigma_2\right) - \cdots\right\}.$$

On peut donner à la formule (66) la forme

(67) $$w(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\,H(2,\,0)\,d\sigma_2,$$

en désignant par $H(2,\,0)$ la somme de la série

(68) $$\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} - \left(\int\limits_{(S_1)}\frac{l_1(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 - \frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{(S_1)}\frac{l_2(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1 - \int\limits_{(S_1)}\frac{l_1(\sigma_1, 2)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}\,d\sigma_1\right) + \cdots\right\},$$

si cette série est uniformément convergente comme fonction du point (x_2) sur (S_1).

Pour s'assurer, que la série (68) est effectivement uniformément convergente sur (S_1), il suffit d'appliquer la formule (66) à la fonction $\mu(\sigma)$ définie dans le § 7 (5).

La variation totale de cette fonction $\mu(\sigma)$ est égale à l'unité et comme pour chaque fonction $F(x)$ continue sur (S) on a

$$\int\limits_{(S)} \mu(\sigma)\,F(x)\,d\sigma = F(x_3),$$

en posant $u(\sigma) = \mu(\sigma)$ nous obtenons que la la série (66) ne diffère pas de la série, qu'on obtient de la sérıe (68) en y remplaçant le point (x_2) par le point (x_3).

Il suit de là que la série (68) est uniformément convergente comme fonction de (x); mais dans les inégalités qui démontrent cette convergence intervient seulement la variation totale de la fonction $\mu(\sigma)$, qui ne surpasse pas l'unité, indépendamment de la position du point (x_2), d'où suit la convergence uniforme de la série comme fonction de (x_2).

En étudiant la série (68) nous trouvons, le point (x) étant dans l'intérieur de $(D^{(i)})$,

$$\int\limits_{(S_1)} \frac{l_1(\sigma_1, 2)\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{21} N_2)}{r_{21}^2}\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} \frac{\cos(r_{32} N_2)}{r_{32}^2}\cdot\frac{\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2} d\sigma_3 ; \int\limits_{(S_1)} \frac{l_k(\sigma_1, 2)\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2}\left(\int\limits_{(S_3)} l_{k-1}(\sigma_1, 3)\, l_1(\sigma_3, 2)\, d\sigma_3\right) d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_3)} l_1(\sigma_3, 2)\left(\int\limits_{(S_1)} l_{k-1}(\sigma_1, 3)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma_3 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} \frac{\cos(r_{23} N_2)}{r_{32}^2}\left(\int\limits_{(S_1)} l_{k-1}(\sigma_1, 3)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma_3 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} \frac{\cos(r_{32} N_2)}{r_{32}^2}\left(\int\limits_{(S_1)} l_{k-1}(\sigma_1, 3)\frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) d\sigma_3 .$$

Comme, le point (x) étant dans $(D^{(i)})$, la série

$$\frac{\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2} - \left(\int\limits_{(S_1)} \frac{l_1(\sigma_1, 3)\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \frac{\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2}\right) +$$

$$+ \left(\int\limits_{(S_1)} \frac{l_2(\sigma_1, 3)\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \int\limits_{(S_1)} \frac{l_1(\sigma_1, 3)\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1\right) - \cdots$$

est uniformément convergente et a pour somme $2H(3, 0)$, on peut donner à l'égalité (68) la forme

$$(69)\quad H(2, 0) = \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} \frac{\cos(r_{32} N_2)}{r_{32}^2} H(3, 0)\, d\sigma_3 = -\frac{d\frac{1}{r_{20}}}{dn_2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dn_2}\int\limits_{(S_3)} \frac{1}{r_{32}} H(3, 0)\, d\sigma_3\right)_i - H(2, 0),$$

la différentiation étant éffectuée en traitant les fonctions comme les fonctions du point (x_2).

On trouve sans peine que la fonction

$$\tag{70} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} H(3,\ 0)\frac{d\sigma_3}{r_{32}}$$

résout le problème de Dirichlet et donne la fonction de (x), qui est égale sur (S) à $\frac{1}{r_{20}}$, le point (x_2) étant un paramètre.

En appliquant les formules du § 5 on trouve effectivement que

$$H(2,\ 0) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} - \left(\int\limits_{(S_1)} k_1(2,\ 1)\frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1 - \frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_{(S_2)}\frac{k_2(2,\ 1)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1 - \int\limits_{(S_1)}\frac{k_1(2,\ 1)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1\right) - \cdots\right\}$$

et la fonction (70) est égale à

$$\frac{1}{2}\left\{w_1(0) - \left(w_2(0) - w_1(0)\right) + \left(w_3(0) - w_2(0)\right) - \cdots\right\}$$

où

$$w_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\frac{\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}d\sigma_3; \quad w_{n+1}(0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\left(\int\limits_{(S_1)}\frac{k_n(3,\ 1)\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}d\sigma_1\right)d\sigma_3;$$

nous posons ici, suivant les notations du § 5:

$$k_1(3,\ 1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{31}^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(r_{31}N_3)}{r_{31}^2},$$

$$k_n(3,\ 1) = \int\limits_{(S_4)} k_{n-1}(3,\ 4)k_1(4,\ 1)d\sigma_4.$$

On a, donc, définitivement

$$\tag{70} w(0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\left(\frac{dG(2,\ 0)}{dn_2}\right)_i d\sigma_2,$$

$G(2,\ 0)$ étant la fonction de Green correspondante au problème.

Or, si le point (x) est dans l'intérieur de $(D^{(i)})$, la fonction $\frac{dG_2(2, 0)}{dn_2}$ est une fonction continue et bornée du point (x_2).

On trouve donc, si $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction sommable sur (S):

$$u(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f(x)\, d\sigma,$$

en appliquant le théorème du § 7 (2)

$$(70') \qquad w(0) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_2)} f(x_2) \frac{dG(2, 0)}{dn_2}\, d\sigma_2,$$

l'intégrale étant prise dans le sens de M. Lebesgue.

Nous nous sommes bornés dans ce qui précède, ayant en vu la simplicité, au problème intérieur dans le cas (E). Les formules (70) et (70′) subsistent cependant pour le problème intérieur dans le cas (I) et pour les problèmes extérieurs; pour ces derniers problèmes il faut seulement changer le signe dans les parties droites des formules (70) et (70′).

Pour s'en convaincre, rappelons-nous, que la solution du problème dans ces cas exclus est donnée par la formule

$$w(0) = \pm \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2) H(2, 0)\, d\sigma \pm V_0,$$

où V_0 est un potentiel de simple couche et la fonction $H(2, 0)$ dans le cas du problème extérieur est donnée par la série, qu'on obtient de la série (68) en mettant partout le signe $(+)$.

Le potentiel V_0 est égal à

$$(72) \qquad \int\limits_{(S_1)} \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \psi^{(l)}(x_1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

où $\psi^{(l)}(x)$ sont les fonctions fondamentales de l'équation intégrale du chapitre 6, correspondantes au pôle $\xi = -1$ dans le cas (I) et au pôle $\xi = 1$ dans le cas des problèmes extérieurs; pour la simplicité nous mettons ici la

lettre ψ à la place de la lettre φ, qui est utilisée dans les paragraphes précédents.

Les nombres γ_l forment la solution du système

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l C_l^{(\lambda)} = \int_{(S)} u(\sigma)\psi^{(\lambda)}\,d\sigma, \qquad \lambda=1, 2, \ldots k$$

dans lequel les nombres $C_l^{(\lambda)}$ sont les nombres déterminés.

Il suit de là que

$$\gamma_l = \int_{(S)} u(\sigma)\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} g_l^{(\lambda)}\psi^{(\lambda)}\right)d\sigma = \int_{(S)} u(\sigma)\psi_l(x)\,d\sigma,$$

les $g_l^{(\lambda)}$ étant les nombres déterminés et que

$$V_0 = \int_{(S_1)} \frac{1}{r_{10}}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\int_{(S_2)} u(\sigma_2)\psi_l(x_2)\psi^{(l)}(x_1)\,d\sigma_2\right)d\sigma_1 =$$

$$= \int_{(S_2)} u(\sigma_2)\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(2)\int_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\,d\sigma_2.$$

Les fonctions $\psi_l(2)$, comme les fonctions linéaires des fonctions fondamentales, sont elles-mêmes les fonctions fondamentales. La formule (67) doit être remplacée par la formule

$$w(0) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_{(S_2)} u(\sigma_2)H(2, 0)\,d\sigma_2 \pm \int_{(S_2)} u(\sigma_2)\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(2)\int_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_2,$$

le signe (+) répondant au cas (I) et le signe (—) aux problèmes extérieurs.

Ayant en vue la remarque faite à propos de la série (68), il faut remplacer l'égalité (69) par l'égalité

$$(69') \quad H(2, 0) = -\frac{d\frac{1}{r_{20}}}{dn_2} \pm \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{dn_2}\int_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}H(3', 0)\,d\sigma_3\right)_{(i, e)} - H(2, 0).$$

La fonction harmonique, qu'on utilise en formant la fonction de Green, est égale dans nos cas à

$$\Gamma(2,\,0) = \pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}H(3,\,0)\,d\sigma_3 \pm \int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_3,$$

d'où il suit que

$$2H(2,\,0) = -\frac{d\frac{1}{r_{20}}}{dn_2} + \left(\frac{d\,\Gamma(2,\,0)}{dn_2}\right)_{(i,\,e)} \mp$$

$$\mp\frac{d}{dn_2}\left(\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_3\right)_{(i,\,e)}$$

et

$$w(0) = \mp\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}u(\sigma_2)\left(\frac{d}{dn_2}G(2,\,0)\right)_{(i,\,e)}d\sigma_2 -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_{(S_2)}u(\sigma_2)\left[\left\{\frac{d}{dn_2}\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_3\right\}_{(i,\,e)}\mp\right.\right.$$

$$\left.\mp 4\pi\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(2)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right]d\sigma_2.$$

Or

$$\frac{d}{dn_2}\left\{\int\limits_{(S_3)}\frac{1}{r_{32}}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)}{r_{10}}\,d\sigma_1\right)d\sigma_3\right\}_{(i,\,e)} \mp 4\pi\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(2)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)}{r_{10}}\,d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{(S_3)}\frac{\cos(r_{32}\,N_2)}{r_{32}^2}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_3 \mp$$

$$\mp 2\pi\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(2)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)}{r_{10}}\,d\sigma_1 = 0,$$

car, comme les fonctions $\psi_l(2)$ sont fondamentales,

$$\int\limits_{(S_3)}\frac{\cos(r_{32}\,N_2)}{r_{32}^2}\left(\sum_{l=1}^{l=k}\psi_l(3)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}\right)d\sigma_3 = \pm\,2\pi\sum_{l=1}^{l=n}\psi_l(2)\int\limits_{(S_1)}\frac{\psi^{(l)}(1)\,d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Il suit de là qu'on a

$$w(0) = \mp \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2) \left(\frac{d}{dn_2} G(2, 0) \right)_{(i, e)} d\sigma_2, \tag{73}$$

ce qu'il était à démontrer.

Si $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ sommable sur (S), la formule (73) devient

$$w(0) = \mp \int\limits_{(S_2)} f(x_2) \left(\frac{d}{dn_2} G(2, 0) \right)_{(i, e)} d\sigma_2. \tag{74}$$

On voit ainsi que les formules classiques (74) de la théorie du potentiel subsistent dans le cas général, quand la fonction $f(x)$ est sommable. Les fonctions (74) vérifient les conditions:

a) dans chaque point (x), où la fonction $f(x)$ est continue, on a

$$w_i = f(0), \quad \text{respectivement } w_e = f(0)$$

b) pour chaque domaine (σ) sur (S), on a

$$w^{(i)}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f(x)\, d\sigma, \qquad w^{(e)}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f(x)\, d\sigma.$$

On peut démontrer l'assertion (a) en appliquant directement la méthode de Liapounoff, si on prend quelques précautions.

La formule (73) donne une solution dans les cas plus généraux.

CHAPITRE 8

Sur le potentiel newtonien

1. En s'occupant dans les §§ 10 (2) et 13 (2) du potentiel newtonien

$$v(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{u(\tau)\, d\tau}{r_{10}} \tag{1}$$

dans lequel $u(\tau)$ est une fonction moyenne additive et à variation bornée des domaines (τ), appartenant au domaine (Ω_y) des points (y), et r_{10} est la

distance entre les points (x) et (y), nous avons donné les conditions suffisantes pour que la fonction $v(x)$ soit une fonction continue et une fonction dérivable.

Nous avons montré dans le § 10 (2), que si pour chaque sphère (τ_0) du rayon ρ subsiste l'inégalité

$$(2) \qquad U(\tau_0)\rho^{2-\lambda} < B, \quad 0 < \lambda \leqq 1,$$

$U(\tau)$ étant la variation moyenne de $u(\tau)$, la fonction $v(x)$ est continue dans tout espace; si pour chaque sphère (τ_0) du rayon ρ subsiste l'inégalité

$$(2') \qquad U(\tau_0)\rho^{1-\lambda} < B, \quad 0 < \lambda \leqq 1,$$

la fonction $v(x)$ possède par rapport aux coordonnées du point (x) les dérivées premières, qui sont continues dans tout espace.

Puis, dans le § 13 (2) nous avons démontré que si la condition (2') est satisfaite, l'égalité

$$(3) \qquad \int\limits_{(\sigma)} \frac{dv}{dn} d\sigma = -4\pi u(\omega)\,\omega,$$

dans laquelle la dérivée $\frac{du}{dn}$ est prise suivant la normale extérieure à (σ), subsiste pour chaque domaine (ω) limité par la surface (σ) de Liapounoff.

L'égalité (3) est une généralisation du théorème de Poisson; la substitution à sa place d'une autre égalité, valable pour chaque fonction moyenne $u(\omega)$, est le but principal de ce chapitre.

2. Si l'égalité (2) n'est pas satisfaite, l'intégrale (1) peut n'avoir pas de sens pour certaines positions du point (x).

Démontrons, en premier lieu, que la fonction $v(x)$, qui est définie par l'égalité (1), est une fonction sommable dans tout espace et même une fonction au carré sommable.

En abordant ce théorème nous empruntons le mode de la démonstration chez M. F. Riesz.*

---

* Acta mathématica, t. 54, fasc. 3—4, p. 327, 328 (Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel).

En premier lieu, nous pouvons supposer que les valeurs de la fonction $u(\omega)$ sont toutes positives. En effet, si $u_1(\tau)$ et $u_2(\tau)$ sont les parties positive et négative de $u(\tau)$ et si l'on pose

$$v_1(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{u_1(\tau)\,d\tau}{r_{10}}, \quad v_2(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{u_2(\tau)\,d\tau}{r_{10}},$$

on trouve

$$v(x) = v_1(x) - v_2(x),$$

d'où suit, qu'on peut affirmer: si les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont les fonctions au carré sommable, la fonction $v(x)$ jouit de la même propriété.

Supposons, donc, que les valeurs de la fonction $u(\omega)$ sont positives et démontrons, que la fonction $v(x)$ est sommable.

Posons $\rho = \frac{1}{n}$, n étant un nombre entier, et décrivons autour du point (x) comme centre une sphère (ρ) du rayon ρ.

Posons

$$f_n(y, x) = \frac{1}{r_{10}},$$

si (y) est dans l'éxtérieur de (ρ);

$$f_n(y, x) = n,$$

si (y) est dans l'intérieur de (ρ).

La fonction $f_n(y, x)$ étant continue dans (Ω_y), l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\,d\sigma$$

a un sens et on a en divisant (Ω_y) en portions $(\tau_1), \ldots (\tau_m)$ d'une manière quelconque

(4) $$v_n(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\,d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} \int\limits_{(\tau_i)} u(\tau) f_n(y, x)\,d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) f_n(\xi_i, x)\,\tau_i,$$

le point (ξ_i) appartenant à (τ_i) et dépendant, éventuellement, de la position du point (x).

Supposons que chaque portion (τ_i) peut être enfermée dans un intervalle ayant la diagonale égale à d.

Soit (y_i) un point quelconque situé dans (τ_i), $r_{i,0}$ sa distance du point (x); désignons par r' la distance entre les points (ξ_i) et (x).

Si (τ_i) est en dehors de (ρ), on a

$$(5) \qquad |f_n(\xi_i, x) - f_n(y_i, x)| = \left|\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_{i,0}}\right| = \frac{|r' - r_{i,0}|}{r' r_{i,0}} < dn^2,$$

la distance entre les points (ξ_i) et (y_i) étant moindre que d et r' avec $r_{i\,0}$ étant dans le cas que nous considérons plus grandes que ρ.

Si (τ_i) a une portion commune avec (ρ), on a pour la différence

$$(6) \qquad |f_n(\xi_i, x) - f_n(y_i, x)|$$

l'inégalité (5), si les points (y_i), (ξ_i) sont tous les deux en dehors de (ρ); l'inégalité

$$|f_n(\xi_i, x) - f_n(y_i, x)| = \left|\frac{1}{r'} - \frac{1}{\rho}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{1}{r_{i,0}} - \frac{1}{\rho}\right|,$$

si un des points (ξ_i), (y_i) est dans l'intérieur de (ρ), ce qui conduit de nouveau à l'inégalité (5) ou, enfin, la différence (6) est égale à zéro, si les points (ξ_i), (y_i) sont tous les deux dans l'intérieur de (ρ).

L'inégalité (5) subsiste, donc, dans tous les cas et si l'on choisit les (τ_i) de manière qu'on ait

$$dn^2 < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné d'avance, on a d'après (5) l'égalité

$$(7) \quad \int_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) f_n(y_i, x)\, \tau_i + \theta \varepsilon\, u(\Omega_y)\, \Omega_y, \quad |\theta| < 1.$$

Il suit de là que pour chaque domaine (ω) on a

$$(8) \quad \int_{(\omega)} \left(\int_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau \right) d\omega = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \left(\int_{(\omega)} f_n(y_i, x)\, d\omega \right) \tau_i + \\ + \theta_1\, \varepsilon u(\Omega_y)\, \Omega_y\, \omega; \quad |\theta_1| < 1.$$

Or, comme on a

$$\int\limits_{(\omega)} f_n(y_i, x)\,d\omega \leq \int\limits_{(\omega)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} < \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{d\omega}{r_{i,0}},$$

la partie droite de l'égalité (8) est plus petite que

$$(9) \qquad u(\Omega_y)\,\Omega_y\,.\,A + \theta\varepsilon u(\Omega_y)\,\Omega_y\,.\,\omega.$$

Les fonctions $v_n(x)$ étant positives et croissantes avec n, la suite

$$v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,\ v_n(x), \ldots$$

a pour limite la fonction $v(x)$ et

$$\lim \int\limits_{(\omega)} v_n(x)\,d\omega = \int\limits_{(\omega)} v(x)\,d\omega.$$

Chaque intégrale

$$\int\limits_{(\omega)} v_n(x)\,d\omega$$

ne surpassant pas le nombre (9), leur limite ne peut pas surpasser ce nombre et la fonction $v(x)$ est intégrable.

En posant maintenant

$$(10) \qquad m(\omega, y)\,\omega = \int\limits_{(\omega)} \frac{d\omega}{r_{10}}$$

et en remarquant que la fonction (10) est continue comme fonction de (y), envisageons l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\,m(\omega, y)\,d\tau.$$

En conservant les notations introduites ci-dessus, on trouve que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\,m(\omega, y)\,\omega d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i)\,m(\omega, \xi_i)\,\omega\,\tau_i,$$

le point (ξ_i) étant dans (τ_i) et ayant, éventuellement, une position dépendante de (ω). Or

$$|m(\omega, \xi_i) - m(\omega, y_i)|\,\omega = \left|\int_{(\omega)} \frac{d\omega}{r'} - \int_{(\omega)} \frac{d\omega}{r_{i,0}}\right| < \int_{(\omega)} \left|\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_{i,0}}\right| d\omega < Ad < \frac{A\varepsilon}{n^2},$$

le potentiel newtonien à densité bornée ayant les dérivées premières continues et bornées.

Soit (ρ_1) une sphère ayant le centre dans (y_i) et le rayon égal à ρ. On a

$$\int_{(\omega)} f_n(y_i, x)\, d\omega = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \int_{(\rho_1)} n\, d\omega = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \frac{4\pi}{3n^3} n = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{n^2};$$

car le point (y_i) est dans l'intérieur de la sphère (ρ) seulement quand le point (x) est dans l'intérieur de la sphère (ρ_1).

D'un autre côté

$$m(\omega, y_i)\,\omega = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \int_{(\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r_{i,0} \sin\theta\, dr_{i,0}\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \frac{4\pi}{2} \rho^2 = \int_{(\omega-\rho_1)} \frac{d\omega}{r_{i,0}} + \frac{2\pi}{n^2}.$$

Il suit de tout cela, que

$$m(\omega, y_i)\,\omega = \int_{(\omega)} f_n(y_i, x)\, d\omega + \frac{2\pi}{3n^2}$$

et

$$\int_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\omega, y)\, \omega\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i)\, m(\omega, y_i)\, \omega\tau_i + \theta' A \frac{\varepsilon}{n^2} u(\Omega)\, \Omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \int_{(\omega)} f_n(y_i, x)\, d\omega\, \tau_i + \theta_1 \left(\frac{A\varepsilon}{n^2} + \frac{2\pi}{3n^2}\right) u(\Omega_y)\, \Omega_y$$

c'est-a-dire que

$$\int_{(\omega)} v_n(x)\, d\omega = \int_{(\omega)} \left(\int_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau \right) d\omega = \int_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\omega, y)\, \omega\, d\tau +$$

$$+ \theta_2 \left(\frac{A\varepsilon + 2\pi}{n^2} \right) u(\Omega_y)\, \Omega_y$$

et

$$(11)\qquad \int\limits_{(\omega)} v d\omega = \lim \int\limits_{(\omega)} v_n(x)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\omega, y)\, \omega d\tau,$$

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\omega, y)\, d\tau.$$

De même, on a évidemment

$$v^2(x) = \Bigg(\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}\Bigg)^2 < \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, d\tau \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}^{\,2}} = u(\Omega_y)\Omega_y \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}^{\,2}}.$$

En supposant, que $f_n(y, x) = \frac{1}{r_{10}^{\,2}}$, si le point (y) est en dehors de (ρ), (ρ) étant de nouveau une sphère du rayon ρ ayant son centre dans (x), et que $f_n(y, x) = \frac{1}{n^2}$, si le point (y) est dans (ρ), nous obtenons

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=n} u(\tau_i) f_n(\xi_i, x)\, \tau_i$$

et

$$|f_n(\xi_i, x) - f_n(y_i, x)| = \left|\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r^2_{i,0}}\right| = \frac{|r' - r_{i,0}|\,(r' + r_{i,0})}{r'^2\, r^2_{i,0}} < 2dn^3$$

si le domaine (τ_i) est en dehors de (ρ), car

$$\frac{r' + r_{i,0}}{r'^2\, r^2_{i,0}} = \frac{1}{r'\, r^2_{i,0}} + \frac{1}{r'^2 r_{i,0}} < 2n^3.$$

Si le domaine (τ_i) a une portion commune avec (ρ), la même inégalité subsiste, comme il suit des considérations ci-dessus.

En choisissant les domaines (τ_i) on peut les prendre assez petits pour qu'on ait $2dn^3 < \varepsilon$. On conclut de là, que la fonction

$$w_n(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau$$

a une limite $w(x)$, qui est sommable dans (Ω_y) et que

$$\lim \int_{(\omega)} v_n^2(x)\, d\omega = \int_{(\omega)} v^2(x)\, d\omega$$

est bornée, d'où suit que la fonction $v^2(x)$ est sommable, ce qu'il fallait démontrer.

3. Soit (σ) une portion de surface, ayant dans tous les points un plan tangent. En se servant des mêmes raisonnements on peut démontrer, que la fonction $v(x)$ est sommable sur (σ).

En effet, en partant de l'égalité (7), on trouve

$$\int_{(\sigma)} \left(\int_{(\Omega_y)} u(\tau) f_n(y, x)\, d\tau \right) d\sigma = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \left(\int_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma \right) \tau_i + \\ + \theta_1 \varepsilon u(\Omega_y)\, \Omega_y \,.\, \sigma.$$

Or

$$\int_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma < \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} < k.$$

Il suit de là que la limite

$$\lim \int_{(\sigma)} v_n(x)\, d\sigma = \int_{(\sigma)} v(x)\, d\sigma$$

est bornée, d'où l'on conclut, que $v(x)$ est sommable sur (σ) et qu'on a

$$\int_{(\sigma)} v(x)\, d\sigma = \lim \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \int_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma \,.\, \tau_i.$$

En posant comme dans le § 11 (5)

$$m(\sigma, x)\, \sigma = \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{10}},$$

on trouve

$$\int_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\sigma, y)\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau)\, m(\sigma, \xi_i)\, \tau_i,$$

le point (ξ_i) ayant, éventuellement, une position dépendante de (σ)

Or

$$|m(\sigma, \xi_i)\sigma - m(\sigma, y_i)\sigma| = \left|\int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r'} - \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r'} - \int\limits_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{i,0}}\right| < Ad^\lambda < \frac{A\varepsilon^\lambda}{n^{2\lambda}},$$

le potentiel

$$\int\limits_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{10}}$$

etant régulièrement continu dans tout espace; ici la densité μ est égale à 1, si le point (x) est sur (σ) et à zéro, d'ailleurs; * nous désignons par (S) la surface fermée, à laquelle appartient la portion (σ).

Il suit de là que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) m(\sigma, y)\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) m(\sigma, y_i)\tau_i + \theta \frac{A\varepsilon^\lambda}{\sigma n^{2\lambda}} u(\Omega_y)\Omega_y,$$

le point (y_i) étant choisi arbitrairement dans (τ_i).

Soit maintenant (ρ_1) la sphère ayant le point (y_i) pour centre et le rayon égal à ρ. Si $(\sigma\rho_1)$ est l'ensemble des points de (σ) appartenants à (ρ_1):

$$m(\sigma, y_i) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma - \sigma\rho_1)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma\rho_1)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma - \sigma\rho_1)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} + \theta \frac{4\pi\varepsilon}{n\sigma};$$

---

* On démontre dans les cours ordinaires ce théorème pour la surface (S) de Liapounoff. Or, l'angle entre les normales en deux points sur la surface n'intervenant pas lors la démonstration, pour achever la demonstration il faut s'assurer seulement de la possibilité de construire des sphères, analogues à celles de Liapounoff, attachées aux divers points. Or, l'existence des pareilles sphères ayant un rayon déterminé est une simple conséquence de la continuité de la variation de la normale sur la surface fermée (S) et on la démontre aisément, en appliquant le théorème connu de M. Borel. Ayant démontré la possibilité d'attacher à chaque point une sphère analogue à celle de Liapounoff, on démontre sans peine l'existence d'un nombre (ω) jouissant des propriétés décrites dans le § 1 (5); cet angle (ω) est donné par l'équation

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{2}\vartheta,$$

où ϑ est la variation de l'angle de la normale sur la portion de (S) contenue dans l'intérieur de la sphère.

car, en choisissant les coordonnées cylindriques avec le pôle dans le point de (σ), qui est le plus près de (y_i), et en plaçant le plan principal dans le plan tangent à (σ) en ce point, on a évidemment

$$\int\limits_{(\sigma\rho_1)} \frac{d\sigma}{r_{i,0}} < b \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{r} = 2b\pi\rho = \frac{2b\pi}{n}, \quad \left(b = \frac{1}{\cos\vartheta}\right);$$

en second lieu on a

$$\int\limits_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma-\sigma\rho_1)} \frac{1}{r_{i,0}}\, d\sigma + \int\limits_{(\sigma\rho_1)} n d\sigma = \int\limits_{(\sigma-\sigma\rho_1)} \frac{1}{r_{i,0}}\, d\sigma + \frac{an}{n^2}$$

car le point (y_i) est dans l'intérieur de (ρ) seulement dans le cas, qnand la distance entre les points (y_i) et (x) est plus petite que (ρ); dans ce cas (x) est dans l'intérieur de (ρ_1); il suit, enfin, des raisonnements du § 4 (5), que la portion commune à (S) et à une sphère de rayon ρ est de la forme $a\rho^2$.

Il suit de tout cela que

$$m(\sigma, y_i) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma + \theta_1 \frac{A'}{n\sigma}, \quad A' = 2b\pi + a, \quad |\theta_1| < 1$$

et

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\sigma, y)\, d\tau = \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma . \tau_i +$$
$$+ \frac{\theta'}{\sigma} \left\{ \frac{A\varepsilon^\lambda}{n^{2\lambda}} + \frac{A'}{n} \right\} u(\Omega_y)\, \Omega_y,$$

ce qui conduit à l'égalité

$$(12) \quad \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\sigma, y)\, d\tau = \lim \sum_{i=1}^{i=m} u(\tau_i) \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} f_n(y_i, x)\, d\sigma . \tau_i = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} v(x)\, d\sigma.$$

Ayant démontré que la fonction $v(x)$ est sommable sur (σ), on s'assure sans peine que la fonction $v(x)\,\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est une fonction bornée sur (σ), est aussi une fonction sommable sur (S).

Ayant toujours

$$v(x)\,|\varphi(x)| < Av(x),$$

où A est la borne supérieure de $|\varphi(x)|$, on voit que

$$\int_{(\sigma)} v(x)|\varphi(x)|\,d\sigma < A\int_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma.$$

Si la fonction $\varphi(x)$ est continue, l'application du théorème du § 9 (2) conduit immédiatement à l'égalité

$$(13)\qquad \int_{(S)} v(x)\varphi(x)\,d\sigma = \int_{(\Omega_y)} u(\tau)\Big(\int_{(S)} \frac{\varphi(x)}{r_{10}}\,d\sigma\Big)\,d\tau,$$

(S) étant une portion de la surface ayant dans chaque point un plan tangent.

En effet, les valeurs de $m(\sigma, 1)$ étant positives, sa borne totale est égale à

$$\int_{(S)} \frac{d\sigma}{r_{10}}$$

et est continue comme fonction de (y); on a, donc, suivant le dit théorème

$$\int_{(S)} \varphi(x)\Big(\int_{(\Omega_y)} v(\tau)\,m(\sigma, y)\,d\tau\Big)\,d\omega = \int_{(\Omega_y)} v(\tau)\Big(\int_{(S)} \varphi(x)\,m(\sigma, y)\,d\sigma\Big)\,d\omega.$$

L'application des théorèmes du § 11 (2) donne finalement

$$\int_{(S)} \varphi(x)\,m(\sigma, y)\,d\sigma = \int_{(S)} \varphi(x)\frac{d\sigma}{r_{10}}.$$

Nous avons supposé que les valeurs de $u(\omega)$ sont positives.

Si $u(\omega)$ est quelconque, nous avons

$$(1')\qquad v(x) = v_1(x) - v_2(x) = \int_{(\Omega_y)} \frac{u_1(\tau)\,d\tau}{r_{10}} - \int_{(\Omega_y)} \frac{u_2(\tau)\,d\tau}{r_{10}},$$

en désignant par $u_1(\omega)$ et $u_2(\omega)$ les parties positive et négative de $u(\omega)$. Les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ étant intégrables dans tout espace et sur chaque portion de surface ayant en chaque point un plan tangent déterminé, la fonction $v(x)$ jouit des mêmes propriétés.

Les formules

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(x)\,d\omega = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\,m(\omega, y)\,d\tau, \quad \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\,m(\sigma, y)\,d\tau$$

subsistent, évidemment, dans le cas général.

4. Étant donnée une fonction des domaines $v(\omega)$, prenons un domaine (ω) et déplaçons tous ses points dans une même direction L à la distance δ. Soit (ω_2) le domaine (ω) dans sa nouvelle position et $v(\omega_2)$ la valeur de $v(\omega)$ qui lui correspond. Ayant formé le rapport

$$\frac{v(\omega_2) - v(\omega)}{\delta} \tag{14}$$

faisons tendre δ vers zéro. Il est possible que le rapport (14) a une limite qui ne dépend pas du mode de la variation de δ. Nous désignerons cette limite par

$$v_L'(\omega) \tag{14'}$$

et nous la nommerons la dérivée de $u(\omega)$ dans la direction L.

Si la fonction $v(\omega)$ est une fonction additive, les valeurs (14'), en cas de leur existence, sont les fonctions additives des domaines.

En effet, si

$$(\omega) = (\omega') + (\omega'')$$

et

$$(\omega_2) = (\omega_2') + (\omega_2''),$$

on a

$$\omega_2 = \omega, \ \ \omega_2' = \omega', \ \ \omega_2'' = \omega''$$

et

$$\frac{v(\omega_2)\,\omega - v(\omega)\,\omega}{\delta} = \frac{v(\omega_2')\,\omega' - v(\omega')\,\omega'}{\delta} + \frac{v(\omega_2'')\,\omega'' - v(\omega'')\,\omega''}{\delta},$$

d'où il suit

$$v_L'(\omega)\,\omega = v_L'(\omega')\,\omega' + v_L'(\omega'')\,\omega'', \tag{15}$$

si les limites $v_L'(\omega')$ et $v_L'(\omega'')$ existent.

Soient données maintenant trois directions L_1, L_2, L_3 perpendiculaires entre eux. Ayant formé les fonctions

$$v'_{L_1}(\omega), \ \ v'_{L_2}(\omega), \ \ v'_{L_3}(\omega)$$

on peut continuer le procédé et, en cas de leur existence, former les dérivées

$$v''_{L_1 L_1}(\omega),\ v''_{L_2 L_2}(\omega),\ v''_{L_3 L_3}(\omega).$$

Si l'expression

$$\Delta v(\omega) = v''_{L_1 L_1}(\omega) + v''_{L_2 L_2}(\omega) + v''_{L_3 L_3}(\omega) \tag{16}$$

est indépendante du choix des directions L_1, L_2, L_3, nous dirons que la fonction $v(\omega)$ possède un laplacien et nous donnerons à l'expression (16) le nom de laplacien.

Si le laplacien $\Delta v(\omega)$ existe, il est égal à

$$\Delta v(\omega) = v''_{\xi\xi}(\omega) + v''_{\eta\eta}(\omega) + v''_{\zeta\zeta}(\omega), \tag{16'}$$

où ξ, η, ζ sont les directions des axes des coordonnées.

Exemple. Supposons que $v(\omega)$ est la moyenne d'une fonction $v(x)$, qui est continue dans un domaine, contenant (ω) dans son intérieur:

$$v(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(x)\, d\omega.$$

Supposons que la frontière (Σ) de (ω) est formée par une surface ayant dans chaque point un plan tangent.

Prenons la direction L pour l'axe OZ. Supposons encore que l'ensemble (E) des points d'intersection avec le plan ΞH des droites, parallèles à Z, qui ont un nombre infini de points communs avec (Σ), a la mesure nulle.

Choisissons un nombre positif ε. Divisons la projection de (ω) sur le plan ΞH en segments (c_i) et construisons les cylindres droits ayant ces portions (c_i) pour bases. Divisons ces cylindres en portions par plans parallèles à ΞH, en choisissant les portions (c_i) et les plans mentionnés de manière, que l'oscillation de $v(x)$ dans chaque domaine ainsi formé soit moindre que ε.

Désignons par δ_0 la plus courte distance entre deux plans consécutifs.

Ayant choisi un nombre δ moindre que δ_0, supposons encore, en divisant, s'il est nécessaire, quelques (c_i) en portions, que la mesure totale des (c_i), qui contiennent les points de l'ensemble (E), soit plus petite que $\varepsilon\delta$ et que $|\cos(Nz)|$, N étant la normale à (Σ), reste dans les cylindres correspondants moindre que ε.

En formant la différence $v(\omega_2)\omega - v(\omega)\omega$ effectuons les intégrations séparément dans chaque cylindre ayant pour base (c_i).

La somme des intégrales, prises suivant les cylindres contenant les points d'ensemble (E), est moindre que $\varepsilon\delta MH$, M étant la borne de $|v(x)|$ et H un nombre dépendant de l'étendue de (ω). Il suit de là, que

$$v(\omega')\omega' - v(\omega)\omega$$

est égale à la somme d'un nombre de la forme $2\theta\varepsilon\delta MH$, $|\theta| < 1$, et des expressions de la forme

$$\int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_1+\delta}^{\zeta_2+\delta} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_2+\delta}^{\zeta_3+\delta} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta + \ldots + \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_{n-1}+\delta}^{\zeta_n+\delta} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta - \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_2}^{\zeta_3} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta - \ldots - \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_n}^{\zeta_n+\delta} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta - \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_1+\delta} v\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta,$$

dans lesquelles $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ sont les coordonnées ζ des points sur certains des plans mentionnés.

En désignant par $\bar{v}$ la valeur de $v(x)$ sur (Σ) et par (σ_i) l'ensemble des portions de (Σ) découpées par le cylindre en question, nous pouvons donner à la dernière différence la forme

$$\delta\int\limits_{(\sigma_i)} \bar{v}\cos(NZ)\,d\sigma + \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_n}^{\zeta_n+\delta}(v-\bar{v})\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta - \int\limits_{(c_i)}\Big(\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_1+\delta}(v-\bar{v})\,d\zeta\Big)\,d\xi\,d\eta.$$

Les différences $(v - \bar{v})$ étant moindres que ε, on voit que

$$\frac{1}{\delta}\big(v(\omega') - v(\omega)\big) - \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\Sigma)} v\cos(NZ)\,d\sigma$$

est moindre que ε, si $\delta < \delta_0$. On a donc

$$v_\xi'(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\Sigma)} v\cos(NZ)\,d\sigma.$$

Si $v(x)$ possède dans l'intérieur de (ω) les dérivées premières continues par rapport à ξ, η, ζ, on a

$$v_\zeta'(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} \frac{\partial v}{\partial \zeta}\,d\omega,$$

c'est-à-dire que dans ce cas la dérivée de $v(\omega)$ est égale à la moyenne de la dérivée correspondante de $v(x)$. Dans ce cas on a

$$v''_{\xi\xi}(\omega) + v''_{\eta\eta}(\omega) + v''_{\zeta\zeta}(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\Sigma)} \frac{dv}{dn}\,d\sigma$$

et il est clair que le laplacien existe et est égal à

$$\frac{1}{\omega}\int_{(\Sigma)} \frac{dv}{dn}\,d\sigma.$$

Si, enfin, la fonction $v(x)$ possède les dérivées secondes dans l'intérieur de (ω), on trouve finalement

$$\Delta v(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} \Delta v\,d\omega.$$

5. Soit donnée une portion de surface, ayant dans chaque point les éléments de la courbure régulièrement continus et soit donnée une fonction $v(x)$ ayant les dérivées premières régulièrement continues dans un domaine contenant (σ) dans son intérieur. Si ξ, η, ζ, sont les coordonnées des points sur (σ), le lieu géométrique des points (ξ_1, η_1, ζ_1), où

$$(17) \qquad \xi_1 = \xi + \delta\cos(N\xi), \quad \eta_1 = \eta + \delta\cos(N\eta), \quad \zeta_1 = \zeta + \delta\cos(N\zeta),$$

est une portion de surface (σ_1) qui répond aux conditions de Liapounoff, si la distance δ est suffisamment petite.

En évaluant l'élément de la surface (u_1) on trouve sans peine que

$$d\sigma_1 = (1 + \delta K + \delta^2 G)\, d\sigma = T(\delta)\, d\sigma,$$

où K et G sont les courbures moyenne et totale de (σ):

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad G = \frac{1}{R_1 R_2},$$

R_1 et R_2 étant les projections des rayons des courbures principales sur la normale intérieure de (σ).

Si v_1 est la valeur de $v(x)$ sur (σ_1), on a

$$v_1 = v + \delta \frac{dv}{dn} +$$

$$+ \delta \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi'} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \cos(N\xi) + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta'} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \cos(N\eta) + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta'} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \cos(N\zeta), \right\},$$

(ξ', η', ζ') étant un point situé entre les points (ξ, η, ζ) et (ξ_1, η_1, ζ_1).

Comme, suivant l'hypothèse, les dérivées de $v(x)$ sont régulièrement continues, la valeur absolue des dernières parenthèses est moindre qu'un nombre de la forme $A\delta^\lambda$, $0 < \lambda \leqq 1$. On conclut de tout cela que

$$\lim \frac{1}{\delta} \left\{ \int_{(\sigma_1)} v_1\, d\sigma_1 - \int_{(\sigma)} v\, d\sigma \right\} = \int_{(\sigma)} \frac{dv}{dn}\, d\sigma + \int_{(\sigma)} vK\, d\sigma, \quad \delta \to 0$$

et que

$$\lim \frac{1}{\delta} \left\{ \int_{(\sigma_1)} v_1\, d\sigma_1 - \int_{(\sigma)} v\, d\sigma \right\} - \int_{(\sigma)} vK\, d\sigma = \int_{(\sigma)} \frac{dv}{dn}\, d\sigma.$$

Nous nommérons l'expression

$$(18) \qquad \frac{1}{\sigma} \left\{ \lim \frac{1}{\delta} \left(\int_{(\sigma_1)} v_1\, d\sigma_1 - \int_{(\sigma)} v\, d\sigma \right) - \int_{(\sigma)} vK\, d\sigma \right\} = \sigma(v)$$

le flux à travers la portion de surface (σ).

Remarquons que les valeurs de l'expression (18) dans le cas général peuvent être différentes pour δ positive et pour δ négative. Nous les

désignerons suivant les notations du chapitre 5 par $\sigma^{(e)}(v)$ et $\sigma^{(i)}(v)$ respectivement.

Si (σ) est la frontière d'un domaine (ω), nous avons, si la fonction $v(x)$ possède les dérivées sécondes dans (ω):

$$\sigma(v)\sigma = \Delta\big(v(\omega)\big)\,\omega.$$

Pour obtenir le flux directement comme la limite d'une variable, introduisons l'expression

(19) $$F(\sigma, v, \delta) = \int\limits_{(\sigma)} v_1\, d\sigma.$$

On s'assure aisément que dans le cas, quand la fonction $v(x)$ possède les dérivées premières régulièrement continues, on a

$$F'(\delta) = \int\limits_{(\sigma)} \frac{dv}{dn}\, d\sigma.$$

A cause de cela, à la définition donnée plus haut nous pouvons substituer la suivante

(18') $$\sigma(v)\cdot\sigma = \lim \frac{1}{\delta}\big(F(\delta) - F(0)\big)$$

en traitant l'existence pour $\delta = 0$ de la dérivée du côté gauche et du côté droit chez la fonction $F(\delta)$ comme la condition nécessaire pour l'existence des flux $\sigma^{(i)}(v)$ et $\sigma^{(e)}(v)$.

Remarque. Pour expliquer le sens de la variable (19) imaginons que la portion de surface (σ) est le lieu des particules d'une matière quelconque, le nombre des particules sur (σ) et (σ_1) étant le même. En nommant la densité de la distribution des particules sur (σ) le nombre des particules sur l'unité de la surface, on obtient que la densité μ_1 de leur distribution sur (σ_1) est égale à $\frac{\mu}{T(\delta)}$, si μ est la densité de la distribution sur (σ), car les mêmes particules remplissant les éléments $d\sigma$ et $d\sigma_1$, on a

$$\mu d\sigma = \mu_1\, d\sigma_1 = \mu_1\, T(\delta)\, d\sigma.$$

A cause de cela

$$\int_{(\sigma_1)} \mu_1 v_1 d\sigma_1 = \int_{(\sigma)} \mu v_1 d\sigma$$

et pour passer à l'expression (19) il faut supposer seulement que $\mu = 1$

Si la surface (S) possède les éléments de la courbure réguliéremen continues, nous dirons, que la surface (S) appartient à la classe (C).

Si la surface fermée (S) est composée par un nombre fini des por tions $(\sigma_1), \ldots (\sigma_k)$, qui appartiennent aux diverses surfaces de la classe (C) on peut former une fonction $\sigma(v)$, additive et à variation bornée d'aprés l règle suivante: si tous les points de (σ) appartiennent à une des portion $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_k)$, $\sigma(v)$ est le flux à travers (σ); si les points de (σ) appartien nent à deux portions (σ_i) et (σ_{i+1}) contigues:

$$\sigma(v) \cdot \sigma = \sigma'(v) \sigma' + \sigma''(v) \sigma'',$$

(σ') et (σ'') étant les portions de (σ) appartenant à (σ_i) et à (σ_{i+1}). Nous diron que la fonction $\sigma(v)$ ainsi définie est le flux à travers la portion (σ) de l surface (S). Le flux à travers (S) est égal à

$$\frac{1}{S} \int_{(S)} \sigma(v) d\sigma = \sigma(S)$$

Remarque. Nous avons dit au commencement de ce paragraphe que l lieu géométrique (σ_1) des points (17) est une portion de surface de Liapou noff. Mais on peut même affirmer, que ce lieu géométrique est une portio de surface de la classe (C). En effet, le déterminant fonctionnel du systèm

$$\xi_1 = \xi + \delta \cos(N\xi), \quad \eta_1 = \eta + \delta \cos(N\eta)$$

étant égal à $T(\delta)$, on peut trouver ξ et η en fonctions des ξ_1, η_1. Comm $\cos(N\xi)$, $\cos(N\eta)$ possèdent les dérivées premières par rapport à ξ et η, ξ et η possèdent les dérivées premières par rapport à ξ_1, η_1. Il suit de là que

$$\cos(N\xi), \ \cos(N\eta), \ \cos(N\zeta),$$

qui déterminent la normale à (σ_1), si on les traite comme fonctions des ξ_1 et η_1, possèdent les dérivées premières.

Or, pour calculer tous les éléments de la courbure on a besoin seulement de ces dérivées.*

On s'en assure aussi en remarquant que les dérivées $\frac{d\zeta_1}{d\xi_1}$, $\frac{d\zeta_1}{d\eta_1}$ sont égales respectivement à $-\frac{\cos(N\xi)}{\cos(N\zeta)}$, $-\frac{\cos(N\eta)}{\cos(N\zeta)}$, d'où suit que ζ_1 est deux fois dérivable par rapport à ξ_1 et η_1.

On trouve, par exemple,

$$T(\delta)K_1 = K + \delta G,\ T(\delta)G_1 = G,$$

K_1 et G_1 étant les courbures de (σ_1); les rayons des courbures principales de (σ_1) sont égaux à $\frac{1}{R_1+\delta}$ et $\frac{1}{R_2+\delta}$; si (σ_1) et (σ_2) correspondent aux valeurs δ_1 et $\delta_1+\delta_2$ de δ, on a

$$d\sigma_2 = T(\delta_1+\delta_2)d\sigma = (1+\delta_2 K_1 + \delta_2^2 G_1)(1+\delta_1 K + \delta_1^2 G)d\sigma =$$
$$= (1+\delta_2 K_2 + \delta_2^2 G_2)d\sigma_1.$$

6. Revenons maintenant à la fonction $v(x)$ définie par l'égalité (1). Supposons que le domaine (ω) est quelconque et étudions la variable

(20) $$\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(\omega_2)}\frac{d\omega_2}{r_{12}} - \int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\right),$$

dans laquelle nous désignons par (x_2) le point qui avant le déplacement de (ω) était identique avec le point (x). Nous supposerons, pour fixer les idées, que le déplacement est effectué dans la direction de l'axe ξ. Ici r_{12} et r_{10} sont les distances du point (y) jusqu'aux points (x_2) et (x).

Or, si on déplace le point (y) parallèlement à l'axe ξ dans la direction, qui est opposée à la direction du déplacement des points (x), le point (y) prendra la position (y_2) et la distance r_{20} entre les points (y_2) et (x) sera

* Voir, par exemple, mon mémoire «Sur le problème de Neumann» (О задаче Неймана Recueil mathématique de Moscou, t. 35, § 2.

égale à r_{12}, ayant la même direction que r_{12}. La variable (20) est donc égale à

$$(20') \qquad -\left[\frac{1}{-\delta}\left\{\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{20}}-\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\right\}\right],$$

ce qui montre que la limite de la variable (20) pour $\delta \rightarrow 0$ est égale à

$$(20'') \qquad -\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}=\int\limits_{(\omega)}\frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\,d\omega$$

c'est-à-dire, à la dérivée d'un potentiel newtonien par rapport à la coordonnée ξ du point (y); nous supposons, comme toujours, que la distance r_{10} est dirigée du point (x) vers le point (y).

Comme les dérivées premières d'un potentiel newtonien à densité bornée sont régulièrement continues dans tout espace, la différence entre les valeurs de la dérivée en deux points à la distance δ' étant en valeur absolue moindre qu'un nombre de la forme $A\delta'\,|\log\delta'|$, on voit que

$$\left|\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\omega_2)}\frac{d\omega}{r_{12}}-\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\right\}-\int\limits_{(\omega)}\frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\,d\omega\right|<A\delta\,|\log\delta|,$$

la fonction (20′) étant égale à la valeur de la dérivée en un point situé entre les points (y) et (y_2). Il suit de tout cela que

$$\frac{1}{\delta}\{v(\omega_2)-v(\omega)\}\,\omega=\int\limits_{(\Omega_y)}u(\tau)\left(\int\limits_{(\omega)}\frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\,d\omega\right)d\tau+\int\limits_{(\Omega_y)}u(\tau)\,A\delta\,|\log\delta|\,d\tau.$$

Le second terme dans la dernière égalité étant en valeur absolue plus petit que $U(\Omega_y)\,\Omega_y\cdot A\delta\,|\log\delta|$, $U(\omega)$ étant la variation moyenne de $u(\omega)$, on en conclut que

$$(21) \qquad v_\xi'(\omega)=\int\limits_{(\Omega_y)}u(\tau)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)}\frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\,d\omega\right)d\tau.$$

Supposons maintenant que le domaine (ω) est limité par un nombre fini des portions de surface ayant en chaque point un plan tangent déterminé. Dans ce cas on a

$$\int\limits_{(\omega)}\frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\,d\omega=\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\,d\sigma,$$

si (σ) est la frontière de (ω). La formule (21) prend la forme

$$(21') \qquad v_\xi'(\omega) = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma\right) d\omega$$

Soient $(\sigma_1), (\sigma_2), \ldots (\sigma_k)$ les portions de (σ) sur lesquelles la direction de la normale N se varie continûment. Comme on a

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{i=k} \int\limits_{(\sigma_i)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma$$

et, suivant les théorèmes du § 3:

$$\int\limits_{(\sigma_i)} v d\sigma = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\int\limits_{(\sigma_i)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma\right) d\tau,$$

la formule (21′) conduit à l'égalité

$$(22) \qquad v_\xi'(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\sigma)} v \cos(N\xi)\, d\sigma.$$

Remarquons encore une fois que l'égalité (21′) est établie pour les domaines (ω), limités par les frontières composées d'un nombre fini des portions, ayant en chaque point un plan tangent détérminé se variant continûment. Quel que soit le domaine (ω), le domaine $(\underline{\omega})$ formé par les intervalles d'un des réseaux (R_ν) du § 1 (1), situés dans l'intérieur de (ω), jouit de cette propriété.

Nous avons remarqué dans le § 4 que la dérivée d'une fonction des domaines, si elle existe pour chaque domaine, est une fonction additive. La fonction $v_\xi'(\omega)$ est donc additive.

Enfin, la fonction moyenne $v_\xi'(\omega)$ est absolument continue; on a

$$\left|\int\limits_{(\omega)} \frac{\cos(r_{10}\xi)}{r_{10}^2}\, d\xi\right| < \varepsilon$$

pour chaque ε, si la mesure de (ω) ne surpasse pas un nombre η; il suit de là que

$$|v_\xi'(\omega)\omega| < \varepsilon U(\Omega_y)\Omega_y,$$

si

$$\omega < \eta.$$

Remarquons, pour terminer, qu'on a

$$v_L'(\omega) = v_\xi'(\omega)\cos(L\xi) + v_\eta'(\omega)\cos(L\eta) + v_\zeta'(\omega)\cos(L\zeta).$$

7. Supposons maintenant que la frontière (σ) du domaine (ω) répond aux conditions de Liapounoff et envisageons la différence

$$(23) \qquad \frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(N_2\xi)}{r_{12}^2}d\sigma_2 - \int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(N\xi)}{r_{10}^2}d\sigma\right\},$$

dans laquelle (σ_2) est la frontière du domaine (ω_2) formé suivant la règle décrite dans le § 4, le déplacement de (ω) étant éffectué dans la direction de l'axe ξ.

Introduisons, comme dans le § 6, le point (y_2) obtenu en déplaçant le point (y) parallèlement à l'axe ξ à la distance δ dans la direction, opposée au déplacement des points de (ω).

Si r_{20} est la distance entre les points (x) et (y_2), on a évidemment, le point (x_2) étant le point (x) en nouvelle position, $r_{20} = r_{12}$; on a de plus

$$\cos(N_2\xi) = \cos(N\xi),$$

d'où suit qu'on peut donner à la différence (23) la forme

$$(23') \qquad -\left(\frac{1}{-\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(N\xi)}{r_{20}}d\sigma - \int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}d\sigma\right\}\right).$$

La surface (σ) répondant aux conditions de Liapounoff, $\cos(N\xi)$ es régulièrement continu; on en conclut, suivant le théorème de Liapounoff, que le potentiel de simple couche

$$(24) \qquad A(\sigma, y) = \int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}d\sigma$$

possède les dérivées premières dans l'intérieur de (ω) et dans l'extérieur de (ω), qui sont régulièrement continues dans les domaines de leur existence et tendent vers les limites déterminées, quand le point tend vers la frontière de (ω).

Les dérivées de (24) sont, donc, bornées; soit B la borne de la dérivée de (24), prise dans la direction ξ. Comme on a

$$\frac{1}{-\delta}\left(A(\sigma, y_2) - A(\sigma, y)\right) = -\frac{1}{\delta}\int_y^{y_2} \frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial \xi} d\xi,$$

on voit que la valeur absolue de (23′) ne surpasse pas B.

Faisons maintenant une nouvelle supposition. Supposons que $u(\tau)$ est continue pour $(\tau) = (\omega)$, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim u(\underline{\omega}) = u(\omega) = \lim u(\overline{\omega}),$$

ou que tous les points de la frontière de (ω) sont les points extérieurs pour le domaine (Ω_x). Si l'on prolonge $u(\omega)$ dans tout espace en posant $u(\omega) = 0$, si les points de (ω) sont extérieurs pour (Ω_x), la fonction restant additive, dans le dernier cas mentionné $u(\omega)$ sera continue dans le voisinage de la frontière de (ω); cette remarque permet de traiter les deux cas en même temps.

La fonction $u(\omega)$ étant continue pour (ω), sa variation moyenne $U(\omega)$ l'est aussi, suivant le théorème du § 5 (1).

En choisissant le domaine $(\underline{\omega})$ contenu dans l'intérieur de (ω) et le domaine $(\overline{\omega})$, contenant le domaine (ω) dans son intérieur, de manière qu'on ait

$$U(\vartheta)\,\vartheta < \varepsilon,$$

(ϑ) étant la portion de (Ω_y) contenu dans $(\overline{\omega}) - (\underline{\omega})$, en désignant par (Ω_y') la portion de (Ω_y) contenue dans $(\underline{\omega})$ et par (Ω_y'') la portion de (Ω_y) extérieure à $(\overline{\omega})$, nous avons

$$v_\xi'(\omega)\,\omega = \int_{(\Omega_y'')} u(\tau) A(\sigma, y)\, d\tau + \int_{(\Omega_y')} u(\tau) A(\sigma, y)\, d\tau + \int_{(\vartheta)} u(\tau) A(\sigma, y)\, d\tau$$

et

$$(25)\qquad \frac{v_\xi'(\omega_2)-v_\xi'(\omega)}{\delta}\cdot\omega = \int\limits_{(\Omega_y'')} u(\tau)\frac{A(\sigma, y_2)-A(\sigma, y)}{\delta}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{(\Omega_y')} u(\tau)\frac{A(\sigma, y_2)-A(\sigma, y)}{\delta}\,d\tau + \int\limits_{(\vartheta)} u(\tau)\frac{A(\sigma, y_2)-A(\sigma, y)}{\delta}\,d\tau.$$

La dernière intégrale est en valeur absolue plus petite que

$$BU(\vartheta)\,\vartheta < B\varepsilon;$$

la variable (23) sous les signes des deux premières intégrales converge vers sa limite uniformément, si (y) est dans l'intérieur de (Ω_y') ou de (Ω_y'').

On a donc, indépendamment de la position de (y)

$$\left|\frac{A(\sigma, y_2)-A(\sigma, y)}{\delta}+\frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial\xi}\right| < \varepsilon,$$

si δ est assez petite et ne surpasse pas la moitié de la plus courte distance de la frontière de (ω) aux frontières des $(\underline{\omega})$ et $(\overline{\omega})$.

Or

$$\left|\int\limits_{(\vartheta)} u(\tau)\frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial\xi}\,d\tau\right| < BU(\vartheta)\,\vartheta < B\varepsilon,$$

l'intégrale dans la partie gauche de l'inégalité ayant un sens suivant le théorème du § 3 (2), car on peut enfermer les points, dans lesquels l'oscillation de $\frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial\xi}$ est plus grande qu'un nombre donné ε, dans un nombre fini des domaines $(\tau^{(1)}), \ldots (\tau^{(p)})$, tels que

$$U(\tau^{(1)})\,\tau^{(1)} + \ldots + U(\tau^{(p)})\,\tau^{(p)} < \varepsilon.$$

Il suit de tout cela que

$$\left|\frac{v_\xi'(\omega_2)-v_\xi'(\omega)}{\delta}\,\omega + \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial\xi}\,d\tau\right| <$$

$$< \varepsilon U(\Omega_y')\,\Omega_y' + \varepsilon U(\Omega_y'')\,\Omega_y'' + 2B\varepsilon < \varepsilon U(\Omega_y)\,\Omega_y + 2B\varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$v''_{\xi\xi}(\omega)\,\omega = -\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{\partial A(\sigma, y)}{\partial \xi}\,d\tau = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\right)d\tau.$$

On en conclut immédiatement que

$$\Delta v(\omega)\,\omega = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\right)d\tau. \tag{26}$$

On a, cependant,

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\,\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\,d\tau = \int\limits_{(\Omega_y'')} u(\tau)\,\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\,d\tau + \int\limits_{(\Omega_y')} u(\tau)\,\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\,d\tau + \int\limits_{(\vartheta)} u(\tau)\,\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\,d\tau.$$

et

$$\Delta\int\limits_{(\omega)}\frac{d\omega}{r_{10}}\,d\tau$$

est égale à -4π, quand le point (y) est dans (Ω_y'), à zéro, quand le point (y) est dans (Ω_y'') et reste borné pour les points dans (ϑ).

Soit (ω_0) la portion de (ω) appartenant à (Ω_y); $(\omega_0) = (\omega)$, si (ω) est dans l'intérieur de (Ω_y). On a

$$u(\omega_0)\,\omega_0 - u(\Omega_y')\,\Omega_y' < \varepsilon;$$

à cause de cela la formule (26), qui donne en premier lieu

$$\Delta v(\omega)\,\omega = -4\pi u(\Omega_y')\,\Omega_y' + B\varepsilon = -4\pi\cdot u(\omega_0)\,\omega_0 + C\varepsilon,$$

conduit à l'égalité

$$\Delta v(\omega) = -4\pi u(\omega_0). \tag{27}$$

Remarque. Comme la valeur absolue de la variable (23′) reste bornée, la variable (25), quand elle a une limite et quand elle ne l'a pas, reste en tout cas bornée par le nombre $BU(\Omega)\Omega$, le nombre B dépendant seulement de la mesure de la surface (σ).

La formule (27) est établie en supposant que la frontière (σ) répond aux conditions de Liapounoff. On peut, cependant, supposer que la surface (σ) est formée d'un nombre fini de portions ayant les éléments de la courbure régulièrement continus. Telles sont, par exemple, les frontières des domaines, formées par la réunion des intervalles appartenants à un des réseaux (R_ν) du § 1 (1).

En effet, soit (σ) la réunion d'un nombre fini des morceaux $(\sigma_1), \ldots (\sigma_k)$, satisfaisant à la condition mentionnée.

La dérivée de

$$\int\limits_{(\sigma_i)} \frac{\cos(N\zeta)}{r_{10}}\, d\sigma$$

par rapport à ξ est égale à *

$$\int\limits_{(\sigma_i)} [D_\xi \cos(N\xi) - \cos^2(N\xi)\, K] \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int\limits_{(\sigma_i)} \cos^2(N\xi) \frac{\cos(r_{10} N)}{r_{10}^2}\, d\sigma +$$
$$+ \int\limits_{(l_i)} \cos(N\xi) \frac{\cos(N\eta)\, d\zeta - \cos(N\zeta)\, d\eta}{r_{10}},$$

où

$$D_\xi \cos(N\xi) = \frac{\cos^2(L_1 \xi)}{R_1} + \frac{\cos^2(L_2 \xi)}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

R_1, R_2 étant les projections des rayons des courbures principales sur la normale intérieure, L_1, L_2 les directions des lignes de la courbure et (l_i) le contour de (σ_i) et où la dernière intégration est effectuée dans la direction, adaptée lors des applications de la formule de Stokes.

Il suit de là que la dérivée de

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{i=k} \int\limits_{(\sigma_i)} \frac{\cos(N\xi)}{r_{10}}\, d\sigma$$

est égale à

$$\int\limits_{(\sigma)} [D_\xi \cos(N\xi) - \cos^2(N\xi)\, K] \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int\limits_{(\sigma)} \cos^2(N\xi) \frac{\cos(r_{10} N)}{r_{10}^2}\, d\sigma,$$

* Voir N. Gunther. Sur le problème de Neumann (О задаче Неймана). Recueil mathématique de Moscou, t. 35, §§ 2 et 3.

les intégrales courvilignes, qui ne sont pas bornées, quand le point est dans le voisinage de la frontière d'une des portions (σ_i), se détruisant.

Il suit de là que la dérivée de $A(\sigma, y)$ est de nouveau bornée, ce qui permet d'achever les raisonnements et d'obtenir la formule (27).

Soit, maintenant, (σ) une portion de la surface de la classe (C); construisons suivant la règle du § 5 la portion de surface (σ_1), ayant posé

(28) $\xi_1 = \xi + \delta\cos(N\xi),\quad \eta_1 = \eta + \delta\cos(N\eta),\quad \zeta_1 = \zeta + \delta\cos(N\zeta),$

où (ξ, η, ζ) et (ξ_1, η_1, ζ_1) sont les points appartenants respectivement à (σ) et à (σ_1), et cherchons le flux de la fonction $v(x)$ à travers la surface (σ).

Nous avons suivant la définition

$$(29)\quad \sigma(v)\sigma = \lim \frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)} v_1\, d\sigma - \int\limits_{(\sigma)} v d\sigma\right\} = \lim \frac{1}{\delta}\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left\{\int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{12}} - \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{10}}\right\} d\tau,$$

en désignant par (x_2) le point (28).

Remarquons en premier lieu que

$$(30)\qquad \frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{12}} - \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{10}}\right\}$$

est bornée.

Si r_{10} et r_{12} restent supérieurs à un nombre fixe η, la différence (30) tend uniformément vers la limite

$$+\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2}\, d\sigma = -\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{01}N)}{r_{10}^2}\, d\sigma,$$

qui est bornée; il reste, donc, à étudier les points (y) dans le voisinage de (σ).

Les intégrales

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{(K+\delta G)\, d\sigma}{r_{12}} = \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{(K+\delta G)\, d\sigma_1}{T(\delta)\, r_{12}},\quad \int\limits_{(\sigma_1)} \frac{(K+2\delta G)\, d\sigma_1}{T(\delta)\, r_{12}}$$

étant bornées, si δ est assez petite, par exemple, si l'on a $|\delta K + \delta^2 G| < \frac{1}{2}$, on voit que la variable

$$(30')\qquad \frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma_1)} \frac{d\sigma_1}{r_{12}} - \int\limits_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{10}}\right\} - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(\int\limits_{(\sigma_1)} \frac{T'(\delta)\, d\sigma_1}{T(\delta)\, r_{12}}\right) d\delta$$

diffère de (30) par une fonction bornée.

Menons par le point (y) la normale à (σ); soient $(x^{(0)})$ et $(x_1^{(0)})$ les points, où cette normale coupe (σ) et (σ_1). Construisons dans le plan tangent à (x^0) un cercle du rayon 2δ ayant son centre en $(x^{(0)})$; menons par les points du cerle les normales à (σ). Soient $(\sigma^{(0)})$ et $(\sigma_1^{(0)})$ les portions de (σ) et de (σ_1) ayant pour frontières les points d'intersection de ces normales avec (σ) et (σ_1).

On s'assure sans peine que chacune des intégrales

$$\int\limits_{(\sigma_1^{(0)})} \frac{d\sigma_1}{r_{12}}, \quad \int\limits_{(\sigma^{(0)})} \frac{d\sigma}{r_{10}}$$

ne surpasse pas en valeur absolue un nombre de la forme $a\delta$; il suffit pour cela de choisir les coordonnées cylindriques ayant pour pôles les points $(x^{(0)})$ et $(x_1^{(0)})$ respectivement et pour les plans principals les plans tangents à (σ) et à (σ_1).

Remarque. Si la normale passant par (y) ne coupe pas (σ), on peut prendre les points $(x^{(0)})$ et $(x_1^{(0)})$ sur les prolongements des portions de surface (σ) et (σ_1).

Quand à la variable

$$\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma_1-\sigma_1^{(0)})} \frac{d\sigma_1}{r_{12}} - \int\limits_{(\sigma-\sigma^{(0)})} \frac{d\sigma}{r_{10}}\right\} - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(\int\limits_{(\sigma_1-\sigma_1^{(0)})} \frac{T'(\delta)}{T(\delta)\, r_{12}}\, d\sigma_1\right) d\delta$$

elle est égale à l'intégrale

$$\int\limits_{(\sigma_2-\sigma_2^{(0)})} \frac{\cos(r_{12} N)}{r_{12}^2}\, d\sigma_2,$$

où (σ_2) est la surface (σ_1) correspondante à une valeur δ_2 de δ, pour laquelle $0 < \delta_2 < \delta$; la dernière intégrale est bornée comme l'intégrale de Gauss.

En supposant maintenant que $u(\tau)$ est continue dans le voisinage de (σ), envisageons un domaine (ϑ), contenant (σ) dans son intérieur et tel que

$$U(\vartheta)\,\vartheta < \varepsilon.$$

Comme on a

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\cdot\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{12}}-\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{10}}\right\}d\tau=\int\limits_{(\Omega_y-\vartheta)} u(\tau)\cdot\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{12}}-\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{10}}\right\}d\tau+$$

$$+\int\limits_{(\vartheta)} u(\tau)\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{12}}-\int\limits_{(\sigma)}\frac{d\sigma}{r_{10}}\right\}d\tau$$

et

$$\left|\int\limits_{(\vartheta)} U(\tau)\left(\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2}d\sigma\right)d\tau\right|<4\pi\varepsilon,$$

l'intégrale ayant un sens à cause de la continuité de $u(\sigma)$, on en conclut que (29) est égale à

$$\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2}d\sigma\right)d\tau.$$

Il suit de tout cela que

$$\sigma(v)\sigma=-\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{01}N)}{r_{10}^2}d\sigma\right)d\tau. \tag{31}$$

En appliquant suivant les définitions du § 5 la formule (31) au domaine limité par une surface fermée, composée d'un nombre fini des portions ayant les éléments de la courbure régulièrement continus et telle, que $u(\tau)$ est continue dans son voisinage, nous voyons que pour tels domaines le flux total de la fonction $v(x)$ par la frontière est identique avec le laplacien.

Remarque. Nous avons démontré que la variable (30) est bornée. Il suit de là que, si (σ) est une portion de surface de la classe (C), dans tous les cas, quand $u(\omega)$ est continue dans le voisinage de (σ) et quand cela n'a pas lieu, la variable

$$\frac{1}{\delta}\left\{F(\sigma,v,\delta)-F(\sigma,v,0)\right\}=\frac{1}{\delta}\left\{\int\limits_{(\sigma)} v(x_1)\,d\sigma-\int\limits_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma\right\} \tag{29}$$

est bornée indépendamment de la valeur de δ.

En effet, si G est la borne de la valeur absolue de la variable (30), on a, pour $|\delta|$ ne surpassant pas un nombre donné,

$$\left|\frac{1}{\delta}\left\{F(\sigma, v, \delta) - F(\sigma, v, 0)\right\}\right| < G\int_{(\Omega_y)} U(\tau)\,d\tau = GU(\Omega_y)\Omega_y.$$

La variable (29) étant bornée, $F(\sigma, v, \delta) - F(\sigma, v, 0)$ est infiniment petite pour $\delta \rightarrow 0$. Il suit de là que pour chaque portion (σ) d'une surface de la classe (C):

$$\lim \int_{(\sigma)} v(x_1)\,d\sigma = \int_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma, \quad \delta \rightarrow 0.$$

et même

$$\left|\int_{(\sigma)} v(x_1)\,d\sigma - \int_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma\right| < G|\delta|, \text{ si } |\delta| < \delta_0,$$

les nombres G et δ_0 dépendant exclusivement de (σ).

8. Supposons maintenant de nouveau que les valeurs de $u(\omega)$ sont positives, ce que revient à étudier séparément les parties positive et négative de la fonction $u(\omega)$ plus générale.

Soit donné un domaine quelconque (ω). En envisageant les réseaux des intervalles

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_n,\ \ldots$$

introduits dans le § 1 (1), construisons une suite des domaines

$$(\omega_1'),\ (\omega_2'),\ \ldots,\ (\omega_n'),\ \ldots \tag{32}$$

ormés par les intervalles appartenants à ces réseaux et placés tout à fait dans l'intérieur de (ω). Les domaines (32) tendent vers (ω) et on peut supposer, en supprimant quelques termes dans leur suite, que chaque domaine (32) suivant contient le précédent dans son intérieur. On obtient le domaine (ω'_{n+1}) en ajoutant au domaine (ω'_n) un nombre fini des intervalles; chaque point des frontières de (ω_n') et (ω'_{n+1}) appartient à la frontière d'un, au moins, de ces derniers intervalles.

Marquons les portions des faces des intervalles ajoutés à (ω_n'), formants la partie de la frontière de (ω'_{n+1}); ces parties marquées n'ont pas de portions

communes avec la frontière de (ω'_n). En déplaçant ces portions marquées parallèlement à une longueur τ, variant de 0 jusqu'à un nombre τ_n, on forme un nouveau domaine $(\omega_n'(\tau))$, contenant (ω_n') et contenu dans (ω'_{n+1}), qu'on obtient aussi du domaine (ω_n') en ajoutant les intervalles en nombre fini, cette fois n'appartenant pas aux réseaux R_n. Nous obtenons ainsi la suite des domaines

$$(32') \qquad (\omega_1'(\tau)),\ (\omega_2'(\tau)),\ \ldots,\ (\omega_n'(\tau)),\ \ldots,\ (\omega_n'(0) = \omega'_{n+1}),$$

dépendant d'un paramètre τ et jouissant des propriétés analogues aux propriétés des domaines (32).

Envisageons, enfin, une suite infinie des domaines (ω_n') variant continûment en croissant de $(\omega'_{n+1}(0))$ jusque $(\omega_n'(\tau_{n+1}))$.

Nous formons ainsi un domaine variable $(\underline{\omega})$, inscrit dans (ω), qui a (ω) pour limite, tel que parmi les termes de la suite de ses positions il y a une infinité non dénombrable des domaines, dont les frontières sont composées par un nombre fini des portions, ayant les éléments de la courbure régulièrement continus; chaque domaine suivant contient le domaine précédent dans son intérieur.

Désignons par t la différence $\omega - \underline{\omega}$. On peut traiter $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ comme une fonction de t. Les valeurs de $u(\omega)$ étant positives, quand t décroît, $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ croît et reste bornée.

Il suit de là que la fonction $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ n'est pas continue seulement pour une infinité dénombrable des valeurs de t et qu'on peut assigner une infinité des valeurs de t pour lesquelles $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ est continue et auxquelles correspondent les domaines, appartenant aux ensembles (32').

Si la fonction $u(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ est continue comme fonction de t, pour une pareille valeur de t elle est continue comme fonction des domaines. Si $(\underline{\omega})$ est le domaine, qui correspond à t et si $|t_1 - t|$ est moindre qu'un nombre η, on a

$$|u(\underline{\omega})\,\underline{\omega} - u(\omega(t_1))\,\omega(t_1)| < \varepsilon.$$

Or, si (ω'') est contenu dans $(\underline{\omega})$ et contient $(\omega(t_1))$, on a

$$u(\omega(t_1))\,\omega(t_1) < u(\omega'')\,\omega'' < u(\underline{\omega})\,\underline{\omega},$$

d'où suit

$$|u(\underline{\omega})\,\underline{\omega} - u(\omega'')\,\omega''| < \varepsilon.$$

Soit maintenant

(33) $$(\omega_1''),\ (\omega_2''),\ \ldots\ (\omega_n''),\ \ldots$$

la suite des domaines, formés par les intervalles, tendant vers (ω) et tels que $u(\omega)$ soit continue dans leur voisinage.

Pour chacun des domaines (33) la moyenne $v(\omega)$ possède les secondes dérivées $v''_{\xi,\xi}(\omega)$, $v''_{\xi,\eta}(\omega)$, ... et on peut calculer le laplacien.

On peut former la suite

$$\Delta v(\omega_1'') = -4\pi u(\omega_1''),\ \Delta v(\omega_2'') = -4\pi u(\omega_2''),\ \ldots,$$
$$\Delta v(\omega_n'') = -4\pi u(\omega_n''),\ \ldots.$$

Cette suite a évidemment une limite bien déterminée, qui est égale à $-4\pi \underline{u}(\omega)$.

En raisonnant d'une manière analogue on peut construire une suite de domaines

(33') $$(\omega_1^{(')}),\ (\omega_2^{(')}),\ \ldots,\ (\omega_n^{(')}),\ \ldots$$

formés par les intervalles, contenant (ω), tendant vers (ω) et tels que $u(\omega)$ soit continue dans leur voisinage. La limite des $\Delta v(\omega_n^{(')})$ est évidemment égale à $-4\pi \bar{u}(\omega)$.

Si la fonction $u(\omega)$ est une fonction quelconque additive et à variation bornée, les limites $\Delta v(\omega_n'')$ et $\Delta v(\omega_n^{(')})$ existent de même, étant égales aux différences des limites correspondantes, calculées pour les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$, où

$$v_1(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u_1(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}, \quad v_2(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u_2(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}};$$

ces limites sont évidemment égales respectivement à $-4\pi \underline{u}(\omega)$ et à $-4\pi \bar{u}(\omega)$.

Au lieu de s'occuper des laplaciens, on pourrait prendre les flux totaux à travers les frontières des domaines (33) et (33') et s'assurer que leurs suites ont aussi des limites déterminées, égales respectivement à $-4\pi \underline{u}(\omega)\,\omega$ et à $-4\pi \bar{u}(\omega)\,\omega$.

Si la fonction $u(\omega)$ est continue dans le voisinage de (ω), les deux limites sont égales. Nous dirons dans ce cas, que la limite de $\Delta v(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$ est

le laplacien total de $v(x)$ pour (ω) ou le flux total à travers la frontière de (ω).

Remarque. En formant le domaine variable $(\underline{\omega})$ tendant vers (ω), on peut encore procéder comme il suit.

Ayant formé les domaines (32), on peut changer chacun d'eux en un domaine, limité par une surface de la classe (C); car la frontière de chaque domaine (ω_n') contient un nombre fini des arêtes et des sommets.

Les domaines $\omega_n'(\delta)$, limités par le lieu géométrique des points

$$\xi_1 = \xi + \delta \cos(N\xi),\quad \eta_1 = \eta + \delta \cos(N\eta),\quad \zeta_1 = \zeta + \delta \cos(N\zeta),$$

où (ξ, η, ζ) est le point sur la frontière de (ω_n') et N la normale à cette frontière, sont de même les domaines limités par les surfaces de la classe (C) et on peut assigner les nombres $-\delta_n'$ et δ_n'' de manière, que les domaines $(\omega_n'(\delta))$ soient contenus dans le domaine $(\omega_{n+1}'(-\delta_{n+1}'))$ et contiennent le domaine $(\omega_{n-1}'(\delta_{n-1}''))$.

Il reste encore à envisager une suite infinie des domaines $(\underline{\omega}_n)$ variant continûment de $(\omega_{n-1}'(\delta_{n-1}''))$ jusque $(\omega_n'(-\delta_n'))$, pour obtenir le domaine variable $(\underline{\omega})$, qui répond à toutes les conditions nécessaires pour achever les raisonnements.

On peut former de la même manière le domaine variable $(\overline{\omega})$.

Nous pouvons maintenant compléter une lacune, qui est restée dans le § 5. Nous avons défini dans le chapitre 5 pour une fonction $v(x)$, ayant les dérivées premières régulièrement continues, le flux comme l'expression

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{dv}{dn}\,d\sigma.$$

Si (σ) est une portion de la surface de la classe (C), l'équivalence de cette définition et de la définition du § 5 est établie dans le § 5. Or, si (σ) n'appartient pas aux portions des surfaces de la classe (C), la définition du § 5 permet de définir le flux seulement comme la limite des flux des portions des surfaces de la classe (C) qui tendent vers (σ). Il est aisé de démontrer que dans les cas, que nous considérons, cette limite existe et est égale au flux, introduit dans le chapitre 5; la portion de la surface (σ') tendant vers (σ)

$$\lim \frac{1}{\sigma'}\int\limits_{(\sigma')}\frac{dv}{dn}\,d\sigma' = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{dv}{dn}\,d\sigma,$$

les éléments sous le signe de la première intégrale tendant vers les éléments correspondants sous le signe de la seconde.

9. Nous dirons qu'un ensemble des domaines forme un corps:

1) si un domaine quelconque (ω) étant donné, il existe une infinité non dénombrable de domaines $(\underline{\omega})$ inscrits dans (ω), respectivement, des domaines $(\overline{\omega})$ circonscrits, appartenant au corps, qui tendent en croissant, respectivement, en décroissant vers (ω);

2) si (ω) et (ω_1) font partie du corps et tous les points de (ω_1) sont les points de (ω), l'ensemble des points de (ω) n'appartenant pas à (ω_1) et de leurs points limites est le domaine (ω_2), faisant partie du corps;

3) si l'ensemble des points, appartenant aux deux domaines (ω_1) et (ω_2), faisant partie du corps, et de leurs points limites est le domaine (ω_3) appartenant au corps.

Remarquons que le domaine (ω) appartenant au corps, on peut toujours le diviser en deux domaines (ω_1) et (ω_2), appartenant au corps.

Il suffit de construire un domaine quelconque (τ), ayant une partie commune avec (ω) et de trouver un domaine $(\underline{\tau})$, appartenant au corps. La partie commune de (ω) et de $(\underline{\tau})$ est le domaine (ω_1), appartenant au corps suivant la condition (3); la condition (2) conduit alors à la décomposition cherchée.

En cherchant le laplacien $\Delta v(\omega)$, nous l'avons trouvé seulement pour les domaines d'un corps; pour les domaines de ce corps, $\Delta v(\omega)$ est égal à $-4\pi\, u(\omega)$. Ainsi apparaissent les questions suivantes: si une fonction des domaines $w(\omega)$ est détérminée pour les domaines d'un corps (A), peut-on avec ces données construire une fonction moyenne $w(\omega)$, qui soit définie pour chaque domaine d'un corps plus général ou de l'espace; si les valeurs données de la fonction $w(\omega)$ sont égales dans le corps (A) aux valeurs de la fonction moyenne $u(\omega)$, que peut-on dire sur la différence $w(\omega)-u(\omega)$ pour les domaines, n'appartenant pas au corps; et, enfin, quelle influence a la distinction des fonctions $w(\omega)$ et $u(\omega)$ sur la valeur de l'intégrale

$$\int_{(\Omega_y)} w(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}. \tag{34}$$

Nous supposerons, que les valeurs de $w(\omega)$ sont toutes positives.

Si (ω) est un domaine arbitraire, la variable $w(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$, dans laquelle $(\underline{\omega})$ sont les domaines appartenant au corps et tendant en augmentant vers (ω),

a une limite qui ne dépend pas de la loi de la variation de $(\underline{\omega})$. En effet, si $(\underline{\omega_2})$ contient $(\underline{\omega_1})$, $(\underline{\omega_2}-\underline{\omega_1})$ appartient au corps suivant (2) et $w(\underline{\omega_2})\underline{\omega_2}$ est plus grand que $w(\underline{\omega_1})\underline{\omega_1}$; quel que soit le domaine $(\underline{\omega})$ appartenant au corps et tendant vers (ω), il est contenu dans un $(\underline{\omega_2})$ et contient un $(\underline{\omega_1})$, où $(\underline{\omega_1})$ et $(\underline{\omega_2})$ sont les domaines, appartenant à une suite de domaines, variant suivant une loi détérminée. Désignons cette limite par $\underline{w}(\omega)\omega$. On peut définir de la même manière la limite $\overline{w}(\omega)\omega$ en considérant les domaines $(\overline{\omega})$.

Nous supposerons que pour chaque domaine (ω), appartenant au corps, on a

$$\underline{w}(\omega)\omega=\overline{w}(\omega)\omega. \tag{35}$$

et nous prolongerons le corps en ajoutant au corps tous les domaines (ω), pour lesquels l'égalité (35) est satisfaite. La fonction $w(\omega)$ reste additive dans l'ensemble des domaines ainsi formé.

Supposons que (ω) est divisé en portions (ω_1) et (ω_2) et que (ω) avec (ω_1) appartiennent à l'ensemble. Si $(\underline{\omega})$ et $(\overline{\omega}_1)$ appartiennent au corps, leur portion commune (ϑ) lui appartient aussi, ainsi que le domaine $(\underline{\omega})-(\vartheta)=(\underline{\omega_2})$.

On a donc

$$w(\underline{\omega_2})\underline{\omega_2}=w(\underline{\omega})\underline{\omega}-w(\vartheta)\vartheta,\quad w(\vartheta)\vartheta<w(\overline{\omega}_1)\overline{\omega}_1$$

et

$$\underline{w}(\omega_2)\omega_2=w(\omega)\omega-\lim w(\vartheta)\vartheta,\quad \lim w(\vartheta)\vartheta\leqq w(\omega_1)\omega_1$$

d'où suit

$$\underline{w}(\omega_2)\omega_2\geqq w(\omega)\omega-w(\omega_1)\omega_1.$$

Si $(\overline{\omega})$ et $(\underline{\omega_1})$ appartiennent au corps, le domaine $(\vartheta)=(\overline{\omega})-(\underline{\omega_1})$ lui appartient aussi et contient un domaine $(\overline{\omega}_2)$, appartenant au corps.

On a donc

$$w(\overline{\omega}_2)\overline{\omega}_2<w(\vartheta)\vartheta=w(\overline{\omega})\overline{\omega}-w(\underline{\omega_1})\underline{\omega_1}$$

d'où suit

$$\overline{w}(\omega_2)\omega_2\leqq w(\omega)\omega-w(\omega_1)\omega_1.$$

On a donc

$$\overline{w}(\omega_2)\omega_2=\underline{w}(\omega_2)\omega_2=w(\omega)\omega-w(\omega_1)\omega_1.$$

ce qui était à démontrer.

Remarquons maintenant que si la fonction $w(\omega)$ peut être formée et si le domaine (Ω_y) appartient au corps (A), la valeur de (34) est complètement détérminée par les données du problème, même si le procédé de la formation de $w(\omega)$ n'est pas conduit jusqu'au bout.

En effet, en évaluant l'intégrale

$$\int_{(\Omega_y)} w(\tau) \frac{d\tau}{r_{10}}$$

on peut toujours partager (Ω_y), s'il appartient au corps, en domaines plus petits, appartenant au corps (A) et les propriétés (2) et (3) assurent l'existence de la limite détérminée des sommes, qu'on envisage lors du procédé d'intégration.

Il faut cependant faire l'observation suivante. Ayant en vue une généralisation, nous supposerons, que les domaines formant le corps (A) sont tous les domaines intérieurs à un domaine (D), en n'excluant pas la supposition, que (D) est l'espace tout entier.

La variable $w(\underline{D})\underline{D}$ étant croissante, quant $(\underline{D}) \rightarrow (D)$, elle doit être infinie, si elle n'a pas une limite déterminée.

Nous supposerons que cette limite existe et nous ajouterons le domaine (D) au corps (A), en lui donnant le nom d'un corps propre à $w(\omega)$. Si cette condition n'est pas satisfaite, la formation d'une fonction $w(\omega)$ à variation bornée dans le domaine (D) devient impossible et il faut se restreindre par la considération d'une fonction $w(\omega)$ définie pour un domaine (D_1) contenu dans (D). Si le domaine (Ω_y) coïncide avec (D), nous avons une restriction nouvelle pour le corps (A).

Les difficultés du problème de la formation de la fonction $w(\omega)$ tiennent à la généralité de la définition de l'intégrale de Stieltjes, qui est intimement liée avec la généralité de la définition de la fonction moyenne.

Si on se restreint à la considération des fonctions moyennes, définies dans un corps (B) des domaines, jouissant des propriétés (2) et (3), mentionnées ci-dessus, par exemple en supposant que la frontière de chaque domaine est formée par la réunion d'un nombre fini des portions ayant dans chaque point une normale déterminée, qui varie continûment sur cette portion, et si les domaines du corps (A) font partie du corps (B), il s'agira seulement de la formation de la fonction $w(\omega)$ pour le corps (B).

La résolution du problème posé ne peut pas être éffectué par un nombre fini des opérations. Nous montrerons seulement, comment on peut lever les obstacles, qui se manifestent lors de la formation de $w(\omega)$ pour un domaine donné (ω) et nous le résolverons pour un corps (B) assez général.

La possibilité de former la fonction $w(\omega)$ étant ainsi établie,* on pourra parler de l'intégrale (34), car sa valeur est calculable pour chaque domaine; c'est seulement pour quelques domaines (Ω_y), qui n'appartiennent pas au corps (A), sa valeur dépendra éventuellement du mode choisi pour la formation de la fonction $w(\omega)$.

10. Étant donné un point $(x^{(1)})$, construisons une sphère $[\rho]$ ayant le rayon ρ et le centre au point $(x^{(1)})$. Envisageons la variable

$$\overline{w}([\rho])[\rho]. \tag{35}$$

Quand ρ diminue, (35) diminue aussi et, restant positive, a une limite. Si cette limite est différente de zéro, nous la désignerons par $\mu^{(1)}$ en nommant la masse au point $(x^{(1)})$ et en disant, que le point $(x^{(1)})$ est singulier.

La variable

$$\underline{w}([\rho])[\rho]$$

a la même limite pour $\rho \rightarrow 0$, car chacune de ses valeurs est comprise entre deux valeurs de (35).

Remarquons que pour une infinité non dénombrable des valeurs de ρ, on a

$$\overline{w}([\rho])[\rho] = \underline{w}([\rho])[\rho],$$

la fonction $f(\rho)$, où

$$f(\rho + 0) = \overline{w}([\rho])[\rho], \quad f(\rho - 0) = \underline{w}([\rho])[\rho],$$

étant croissante et bornée.

---

* Dans son remarquable mémoire dans les Acta Mathematica, t. 54, M. F. Riesz envisage les fonctions des ensembles ouverts, ce qui revient pour nous à envisager $\underline{u}(\omega)$ à la place de $u(\omega)$, les domaines de M. Riesz étant, cependant, plus généraux. Nous supposons que l'ensemble des points, formant la frontière d'un domaine, a une mesure de Riemann égale à zéro, ce que ne fait pas M. F. Riesz; mais en définissant l'intégrale de Stieltjes, il se contente de la division du domaine (Ω_y) en domaines, appartenant au corps des domaines, pour lesquels la fonction est continue suivant notre définition en démontrant la possibilité d'une pareille division.

Les domaines (ω), pour lesquels le point $(x^{(1)})$ est sur la frontière, n'appartiennent pas au corps (A). En effet, la différence

$$w(\overline{\omega})\,\overline{\omega} - w(\underline{\omega})\,\underline{\omega}$$

ne peut pas avoir zéro pour limite, chaque domaine $(\overline{\omega} - \underline{\omega})$ contenant dans son intérieur une sphère $[\rho]$.

En répétant les raisonnements du § 8 (5), on s'assure, que l'ensemble des points singuliers est dénombrable et que la série

$$\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \cdots$$

est convergente.

Construisons maintenant une nouvelle fonction moyenne additive $\theta^{(1)}(\omega)$ d'après les régles suivantes:

1) si le point $(x^{(1)})$ n'appartient pas au domaine (ω), posons $\theta^{(1)}(\omega) = 0$,

2) si le point $(x^{(1)})$ est dans l'intérieur du domaine (ω), posons

$$\theta^{(1)}(\omega) = \frac{\mu^{(1)}}{\omega},$$

3) pour définir la valeur de $\theta(\omega)$ dans le cas, quand le point $(x^{(1)})$ est sur la frontière de (ω), déplaçons l'origine des axes des coordonnées dans le point $(x^{(1)})$ sans changer leurs directions. La fonction $\theta^{(1)}(\omega)$ devant être additive, il suffit d'envisager les domaines (ω) contenus dans un des 8 angles, formés par les plans des coordonnées.

Construisons autour de $(x^{(1)})$ une sphère du rayon ρ. Soit (E_ρ) l'ensemble des points, appartenant à (ω) et à cette sphère; soit (e_ρ) l'ensemble des projections des points de l'ensemble (E_ρ) sur le plan XY. Les ensembles (E_ρ) et (e_ρ) sont fermés. En comptant les angles en sens positif pour un observateur du coté positif de l'axe Z, soient (φ_ρ') et (φ_ρ'') le plus petit et le plus grand des angles entre l'un des axes (X), (Y), suivant le cas, et les rayons, passants par les points de l'ensemble (e_ρ).

Envisageons un plan, passant par l'axe $0Z$ et formant l'angle φ avec le plan XZ. Soit (c_ρ) l'ensemble des points situés dans ce plan et appartenant à l'ensemble (E_ρ). En menant par les points de (c_ρ) les droites, passant par l'origine, et en envisageant les angles entre ces droites et la direction

positive de l'axe Z, désignons par $\psi_\rho'(\varphi)$ et $\psi_\rho''(\varphi)$ le plus petit et le plus grand de ces angles.

Comme pour $\rho_1 < \rho$ les ensembles (E_{ρ_1}), (e_{ρ_1}), (c_{ρ_1}) sont contenus dans les ensembles (E_ρ), (e_ρ), (c_ρ), respectivement, les variables φ_ρ', φ_ρ'', ψ_ρ', ψ_ρ'' sont monotones et ont les limites pour $\rho \to 0$. Désignons ces limites par φ', φ'', ψ', ψ'' et posons

$$\theta^{(1)}(\omega)\,\omega = \frac{\mu^{(1)}}{4\pi}\int\limits_{\varphi'}^{\varphi''}\int\limits_{\psi'(\varphi)}^{\psi''(\varphi)} \sin\psi\, d\psi\, d\varphi.$$

La fonction $\cos\psi'(\varphi) - \cos\psi''(\varphi)$ est intégrable. Pour le démontrer il suffit de démontrer l'intégrabilité de la différence

$$\psi'(\varphi) - \psi''(\varphi). \tag{36}$$

Envisageons les domaines $(\underline{\omega})$ formés par les intervalles et ayant (ω) pour limite. Ayant choisi le nombre ρ, formons l'intégrale

$$\int\limits_{\varphi'}^{\varphi''} (\underline{\psi}_\rho'(\varphi) - \underline{\psi}_\rho'(\varphi))\, d\varphi,$$

dans laquelle les angles $\underline{\psi}_\rho'(\varphi)$ et $\underline{\psi}_\rho''(\varphi)$ sont calculés pour $(\underline{\omega})$. La fonction $\psi_\rho'(\varphi) - \psi_\rho''(\varphi)$ est la limite de la fonction $\underline{\psi}_\rho'(\varphi) - \underline{\psi}_\rho''(\varphi)$, vers laquelle elle tend en croissant et, comme l'intégrale est moindre que $\frac{\pi^2}{4}$, la dite fonction est intégrable. Or, la fonction (36) est sa limite pour $\rho \to 0$ et comme elle tend vers cette limite en décroissant et en restant positive, la fonction (36) est elle-même intégrable.

Supposons que la fonction $\theta^{(1)}(\omega)$ est additive dans un corps (B_1); le corps (B_1) contient le corps (B) défini dans le § 9. Posons:

$$w(\omega) - \theta^{(1)}(\omega) = w^{(1)}(\omega).$$

La fonction $w^{(1)}(\omega)$ est définie dans le corps (A). Si le point $(x^{(1)})$ est un point éxtérieur pour (ω), on a $w(\omega) = w^{(1)}(\omega)$; si le point $(x^{(1)})$ est un point intérieur pour (ω), on a

$$w^{(1)}(\omega)\,\omega = w(\omega)\,\omega - \mu^{(1)};$$

la limite de $w^{(1)}([\rho])[\rho]$ pour $\rho \to 0$ étant égale à zéro, le point $(x^{(1)})$ n'est pas singulier pour la fonction $w^{(1)}(\omega)$.

Si à la place de $w(\omega)$ nous prenons la fonction

$$(37) \qquad \theta^{(1)}(\omega) + w^{(1)}(\omega),$$

nous obtenons une fonction, qui est définie dans le corps (A) et qui possède dans ce corps les mêmes valeurs que $w(\omega)$, mais qui est définie pour certains domaines ayant le point $(x^{(1)})$ sur la frontière, si $(x^{(1)})$ est le seul point singulier sur la dite frontière.

Quel que soit le nombre des points singuliers $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, . . . que nous devons envisager lors des calculs, on peut toujours substituer à la place de la fonction $w(\omega)$ une fonction

$$(37') \qquad \theta(\omega) + w_1(\omega),$$

qui est définie dans le corps (A) et qui possède dans ce corps les mêmes valeurs que $w(\omega)$, étant définie aussi pour certains domaines ayant les points singuliers mentionnés sur leurs frontières; pour la fonction $w_1(\omega)$ les points $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, . . . ne sont plus les points singuliers.

Remarquons que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} \theta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} = \Sigma \frac{\mu^{(k)}}{r_{k0}},$$

r_{k0} étant la distance entre les points $(x^{(k)})$ et (x).

11. Supposons maintenant que (L) est la ligne d'intersection des frontières de deux domaines, en supposant que (L) est rectifiable.

Prenons une portion (l) de la ligne (L) entre deux points (x') et (x'') situés sur (L) et envisageons un domaine (ω) ayant les points (x') et (x'') sur sa frontière, les autres points de (l) étant ses points intérieurs. Il existe une infinité non dénombrable des domaines $(\underline{\omega})$, appartenants au corps et tendants vers (ω), étant inscrits dans (ω). Soit $\underline{w}(\omega)\omega$ la limite des $w(\underline{\omega})\underline{\omega}$.

Si les points (x') et (x'') ne sont pas les points singuliers, la variable $\underline{w}(\omega)\omega$ a une limite déterminée quand $(\omega) \to 0$.

Si cette limite est différente de zéro, nous nommerons la courbe (L) singulière; on s'assure sans peine que le domaine (ω) n'appartient pas au corps (A), si la courbe singulière (L) appartient à la frontière de (ω).

Pour le démontrer remarquons que quand (ω) diminue, la variable $\underline{w}(\omega)\omega$ diminue aussi en restant positive; il suit de là, que si (ω) varie suivant une loi déterminée, telle que chaque domaine suivant est dans l'intérieur du domaine précédent, $\underline{w}(\omega)\omega$ a une limite.

Envisageons une telle loi de variation de (ω); soient (ω_n') les termes de la suite que nous considérons; désignons par $\nu(l)l$ la limite de $\underline{w}(\omega_n')\omega_n'$.

Quel que soit le nombre positif ε, on a

$$0 < \underline{w}(\omega'_{n_1})\omega'_{n_1} - \nu(l)l < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour

$$n_1 \geqq n_0.$$

Soit (ω_n) le domaine qui varie suivant une autre loi. Entourons les extrémités de (l) par les sphères à rayon r, ayant ces extrémités pour centres et choisissons r de manière, qu'on ait pour chacune des sphères

$$\underline{w}([r])[r] = w([r])[r] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si n est assez grand, les portions de (ω_n), qui n'appartiennent pas à (ω'_{n_1}), sont dans l'intérieur des sphères mentionnées et, si (ω_n'') est la portion restante de (ω_n), on a

$$0 < \underline{w}(\omega'_{n_1})\omega'_{n_1} - \underline{w}(\omega_n'')\omega_n''.$$

On conclut de là que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \underline{w}(\omega'_{n_1})\omega'_{n_1} - \underline{w}(\omega_n)\omega_n,$$

si

$$n > n_2,$$

car on passe de $\underline{w}(\omega_n'')\omega_n''$ à $\underline{w}(\omega_n)\omega_n$ en ajoutant un nombre, qui est moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

D'un autre côté, si n_3 est assez grand, tous les points de (ω'_{n_3}), qui n'appartiennent pas aux sphères mentionnées, sont dans l'intérieur de (ω_n), n étant un nombre choisi parmi les nombres, qui surpassent n_2; on a donc

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \underline{w}(\omega_n)\omega_n - \underline{w}(\omega'_{n_3})\omega'_{n_3}.$$

Il suit de tout cela que

$$\nu(l)\,l - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{w}(\omega'_{n_3})\,\omega'_{n_3} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{w}(\omega_n)\,\omega_n < \underline{w}(\omega'_{n_1})\,\omega'_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \nu(l)\,l + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que pour $n > n_2$ on a

$$-\varepsilon < \underline{w}(\omega_n)\,\omega_n - \nu(l)\,l < \varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si la portion (l) de (L) est décomposée en deux portions (l_1) et (l_2), on a évidemment

$$\nu(l)\,l = \nu(l_1)\,l_1 + \nu(l_2)\,l_2,$$

car on peut prendre pour les domaines entourants (l_1) et (l_2) les domaines obtenus en coupant le domaine attaché à (l) par un plan passant par l'extrémité commune de (l_1) et (l_2).

La limite $\nu(L)L$ existant aussi et les valeurs de $\nu(l)\,l$ étant positives, nous voyons, que s'il n'y a pas sur (L) des points singuliers, la fonction des courbes $\nu(l)\,l$, qu'on peut former pour chaque courbe (l), est à variation bornée.

S'il n'y a pas sur (L) des points singuliers de la fonction $w(\omega)$, la fonction $\nu(l)$ est continue. Pour le démontrer il suffit de répéter la démonstration du théorème analogue dans le § 9 (5), en y changeant seulement $\mu(\sigma)$ et (σ) en $w(\omega)$ et (ω).

Construisons maintenant une fonction moyenne additive et à variation bornée $\vartheta(\omega)$ d'après les règles suivantes:

1) si le domaine (ω) n'a pas des points communs avec (L), on a $\vartheta(\omega) = 0$;

2) si les points d'une portion (l) de (L), excepté ses extrémités, sont les points intérieurs de (ω), on a $\vartheta(\omega)\,\omega = \nu(l)\,l$;

3) pour définir la valeur de $\vartheta(\omega)$ dans le cas, quand (l) est une portion de la frontière de (ω), menons par chaque point (x') de (L) un plan (P) de manière, que dans le voisinage du point (x') il n'y ait pas d'autres points communs à (L) et à (P), et une droite (Z) dans le plan (P) passant par le point (x'), ainsi que fixons une direction (X), perpendiculaire au plan (P).

Traçons dans le plan mentionné un cercle au rayon r ayant le point (x') pour centre. Soit $(E_{x'}(r))$ l'ensemble des points de (ω), situés dans ce plan

et appartenants au cercle. Désignons par φ les angles entre la direction positive de (Z) et des droites passant par (x') et par les points d'ensemble $(E_{x'}(r))$, en comptant ces angles dans le sens positif pour un observateur regardant d'un point sur (X); désignons par $\varphi_r'(x')$ et $\varphi_r''(x')$ les valeurs extrêmes de ces angles en prenant pour l'un d'eux, s'il le faut, la valeur négative. Comme $(E_{x'}(r_1))$ est une portion de $(E_{x'}(r))$ si $r_1 < r$, $\varphi_r'(x')$, $\varphi_r''(x')$ sont monotones quand r diminue.

Désignons par $\varphi'(x')$ et $\varphi''(x')$ les limites de ces angles pour $r \to 0$ et posons

$$\vartheta(\omega)\,\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(l)} \nu(l)\left(\varphi''(x') - \varphi'(x')\right) dl; \tag{38}$$

si $\nu(l)$ est absolument continue, étant la moyenne d'une fonction $\nu(x')$, au lieu de (38) on peut prendre

$$\vartheta(\omega)\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(l)} \nu(x)\left(\varphi''(x') - \varphi'(x')\right) dl. \tag{38'}$$

On démontre comme ci-dessus, que la fonction $\varphi''(x') - \varphi'(x')$ est intégrable; la formule (38') a donc un sens pour chaque domaine (ω). Mais si la fonction moyenne $\nu(l)$, qui est continue, n'est pas absolument continue et si la différence $\varphi''(x') - \varphi'(x')$ n'est intégrable que dans le sens de M. Lebesgue, quelques domaines speciaux doivent être exclus: l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\varphi''(x') - \varphi'(x')$ et de leurs points limites doit avoir une mesure nulle dans le sens de Riemann et ne contenir pas les points, formant l'ensemble des points, dans lesquels la partie singulière de $\nu(l)$ est différente de zéro.

Remarque. La restriction faite ci-dessus, suivant laquelle (L) doit être rectifiable, paraît être d'une nature secondaire, car c'est seulement la formation de la fonction moyenne $\nu(l)$ qui est impossible; on peut substituer à (38) une intégrale de Stieltjes dans le sens ordinaire.

Observons que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} = \int\limits_{(L)} \nu(l)\frac{dl}{r_{10}},$$

si la frontière de (Ω_y) ne contient pas la courbe (L).

Si à la place de $w(\omega)$ nous prenons la fonction

$$\theta(\omega) + \vartheta(\omega) + w_2(\omega), \quad w_2(\omega) = w_1(\omega) - \vartheta(\omega)$$

nous obtenons une fonction qui est définie dans le corps (A) et qui possède dans ce corps les mêmes valeurs que $w(\omega)$, mais qui est éventuellement définie aussi pour certains domaines, dont les frontières contiennent la courbe (L).

On s'assure, en effet, que pour la fonction

$$w_1(\omega) - \vartheta(\omega)$$

la courbe (L) n'est pas singulière; si (ω) est le domaine contenant la portion (l) de (L), on a

$$\lim (w_1(\omega)\,\omega - \vartheta(\omega)\,\omega) = 0.$$

12. Si la fonction $w_2(\omega)$ ne possède ni points ni courbes singuliers, il suffit de la remplacer par la fonction

$$w_3(\omega) = \frac{w_2(\omega) + \overline{w}_2(\omega)}{2} \tag{39}$$

pour obtenir une fonction, qui a les mêmes valeurs dans le corps (A) et qui est définie pour chaque domaine.

Les fonctions $w_2(\omega)$ et $w_3(\omega)$ ont les mêmes valeurs dans le corps (A).

Comme les valeurs de la fonction $w_3(\omega)$ sont positives et $w_3(\omega)\,\omega$ ne surpasse pas le nombre $w(D)\,D$, il reste à démontrer qu'elle est additive.

Supposons que le domaine (ω) est partagé en deux domaines (ω_1) et (ω_2). Envisageons un domaine $(\underline{\omega})$ contenu dans (ω) et deux domaines $(\underline{\omega}_1)$ et $(\underline{\omega}_2)$, contenus respectivement dans (ω_1) et (ω_2) et obtenus en retranchant de $(\underline{\omega})$ un domaine (θ), contenant dans son intérieur les points de la frontière commune des domaines (ω_1) et (ω_2).

Nous pouvons supposer que les domaines $(\underline{\omega})$, $(\underline{\omega}_1)$, $(\underline{\omega}_2)$, (θ), ainsi que les domaines $(\overline{\omega})$, $(\overline{\omega}_1)$, $(\overline{\omega}_2)$, (ϑ), introduits plus loin, appartiennent tous au corps (A).

Parmi les domaines $(\underline{\omega})$, tendant vers (ω), il y a une infinité non dénombrable, appartenant au corps. En partageant les domaines de cette infinité en domaines $(\underline{\omega}_1)$ $(\underline{\omega}_2)$ et (θ), on peut obtenir une infinité non

dénombrable des domaines $(\underline{\omega_1})$, $(\underline{\omega_2})$ appartenant au corps; si (ω_1) et (ω_2) appartiennent au corps, (θ) lui appartient aussi.

Nous avons

$$\underline{w_2}(\underline{\omega})\, \underline{\omega} = w_2(\underline{\omega_1})\, \underline{\omega_1} + w_2(\underline{\omega_2})\, \underline{\omega_2} + w_2(\theta)\,\theta$$

et

$$\underline{w}_2(\omega)\,\omega = \underline{w}_2(\omega_1)\,\omega_1 + \underline{w}_2(\omega_2)\,\omega_2 + \lim w_2(\theta)\,\theta.$$

Soit maintenant $(\overline{\omega})$ un domaine contenant (ω). En prolongeant les frontières de (θ), qui ne font pas partie de la frontière de $(\underline{\omega})$, nous obtenons deux domaines $(\overline{\omega}_1)$ et $(\overline{\omega}_2)$, contenant respectivement (ω_1) et (ω_2); les domaines $(\overline{\omega}_1)$ et $(\overline{\omega}_2)$ ont une portion commune, qui est composée de (θ) et d'un domaine (ϑ), qui contient dans son intérieur la ligne (L) d'intersection de la frontière de (ω) avec la frontière commune des domaines (ω_1) et (ω_2). Nous avons

$$w_2(\overline{\omega})\,\overline{\omega} = w_2(\overline{\omega}_1)\,\overline{\omega}_1 + w_2(\overline{\omega}_2)\,\overline{\omega}_2 - w_2(\theta)\,\theta - w_2(\vartheta)\,\vartheta$$

et

$$\overline{w}_2(\omega)\,\omega = \overline{w}_2(\omega_1)\,\omega_1 + \overline{w}_2(\omega_2)\,\omega_2 - \lim\, w_2(\theta)\,\theta,$$

car

$$\lim w_2(\vartheta)\,\vartheta = 0,$$

la fonction $w_2(w)$ ne possédant pas des lignes singulières.

Il suit de tout cela que

$$w_3(\omega)\,\omega = w_3(\omega_1)\,\omega_1 + w_3(\omega_2)\,\omega_2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si les surfaces de discontinuité de la fonction $w_3(\omega)$ sont formées par la réunion des partions des surfaces de Liapounoff, on peut l'égaler à une somme de deux fonctions, dont l'une est continue.

Soit (S) la frontière d'un domaine (Ω) et (σ) une portion de (S).

Construisons un domaine (ω) appartenant au corps et tel que les points sur la frontière de (σ) soient sur la frontière de (ω), tous les points intérieurs de (σ) étant les points intérieurs de (ω).

Comme la frontière de (σ) n'est pas une ligne singulière de $w_3(\omega)$, on démontre, en répétant presque textuellement les raisonnements du § 11, que $w_3(\omega)\omega$ a une limite, quand $(\omega) \to 0$ et que cette limite ne dépend

pas de la loi de la variation de (ω). En désignant cette limite par

$$\lambda(\sigma)\sigma$$

nous obtenons une fonction moyenne des portions de surface appartenant à (S), dont les valeurs sont positives et qui est additive et, à cause de cela, à variation bornée; on peut même démontrer, qu'elle est continue.

Introduisons maintenant une fonction des domaines $\chi(\omega)$ d'après les règles suivantes:

1) si le domaine (ω) n'a pas les points communs avec (S), dont l'ensemble forme un domaine (σ) de (S), $\chi(\omega)=0$.

2) Si les points de (ω) ne sont pas les points intérieurs de (Ω), quoique les points communs à (ω) et à (S) forment un domaine sur (S), $\chi(\omega)=0$.

3) Si tous les points de (ω) appartiennent à (Ω) et si les points communs à (ω) et à (S) forment un domaine (σ) de (S):

$$\chi(\omega)\,\omega=\lambda(\sigma)\sigma$$

4) la fonction $\chi(\omega)$ est additive.

Posons, enfin,

$$w_4(\omega)=\chi(\omega)+w_3(\omega).$$

La fonction $w_4(\omega)$ est continue dans le voisinage de (S). En effet

$$\overline{w}_4(\Omega)\Omega-\underline{w}_4(\Omega)\Omega=\left(\overline{w}_8(\Omega)\Omega-\underline{w}_8(\Omega)\Omega\right)-\left(\overline{\chi}(\Omega)\Omega-\underline{\chi}(\Omega)\Omega\right)=0,$$

car

$$\overline{\chi}(\Omega)\Omega-\underline{\chi}(\Omega)\Omega=\lambda(S)S-0=\overline{w}_3(\Omega)\Omega-\underline{w}_3(\Omega)\Omega.$$

Remarquons qu'on a

$$\int\limits_{(\Omega_y)} w_8(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}=\int\limits_{(\Omega_y)} w_4(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}+\int\limits_{(S_y)}\lambda(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

13. Etant donnée une fonction moyenne $u(\omega)$ additive et à variation bornée, ayant toutes ses valeurs positives, on peut former une fonction $u_3(\omega)$ en la débarassant de quelques surfaces, lignes et points singuliers.

Si $(x^{(1)})$ est un point singulier, envisageons une sphère $[\rho]$ au rayon ρ ayant ce point pour centre. Soit (ω) un domaine quelconque et $(\omega\rho)$ l'ensemble des points, appartenant à (ω) et $[\rho]$. Posons

$$u_1(\omega)\,\omega = \lim u(\omega - \omega\rho)(\omega - \omega\rho), \quad \rho \to 0$$

la limite existant toujours, car la variable à la droite est croissante, et introduisons la fonction moyenne

$$\theta_1(\omega) = u(\omega) - u_1(\omega).$$

Pour la fonction $u_1(\omega)$ le point $(x^{(1)})$ n'est pas singulier; si l'on pose

$$u([\rho])[\rho] = f(\rho),$$

on a, si $r_1 \to 0$,

$$u_1([r]) = \lim u([r] - [r_1])([r] - [r_1]) = \lim u([r])[r] - \lim u([r_1])[r_1] = \\ = f(r) - f(+0)$$

d'où il suit que

$$\lim u_1([r]) = 0, \quad \text{si} \quad r \to 0.$$

On démontre sans peine que la fonction $u_1(\omega)$ est additive. Posons encore

$$\mu_1^{(1)} = \lim \theta([\rho])[\rho] = \lim u([\rho])[\rho], \quad \rho \to 0,$$

$\mu_1^{(1)}$ étant la masse du point singulier $(x^{(1)})$ pour les fonctions $u(\omega)$ et $\theta(\omega)$.

S'étant ainsi débarassé du point singulier $(x^{(1)})$, entourons la portion (l) d'une ligne singulière (L) par un domaine (ρ_n), ayant les extrémités de (l) sur sa frontière et pour lequel les autres points de (l) sont les points intérieurs, en supposant que (ρ_n) tend vers zéro en décroissant pour $n \to \infty$.

Supposons encore, qu'il n'y a pas des points singuliers de $u_1(\omega)$ situés sur (L). En désignant par $(\omega\rho_n)$ l'ensemble des points communs à (ω) et à (ρ_n), posons

$$\vartheta_1(\omega)\,\omega = \lim u_1(\omega\rho_n)(\omega\rho_n), \; n \to \infty$$

et $\vartheta_1(\omega) = 0$, si (ω) et (ρ_n) n'ont pas des points communs formants un domaine.

On s'assure aisément, en répétant les considérations déja employées ci-dessus, que la valeur de $\vartheta(\omega)\,\omega$ ne dépend pas, sous la supposition faite à propos de (L), du choix des domaines (ρ_n). Nous désignerons encore par $\nu_1(l)\,l$ la fonction $\vartheta_1(\omega)$, si (ω) a des points communs avec (l), en la traitant comme une fonction moyenne des portions de la ligne (L). La fonction $\vartheta_1(\omega)$ ainsi définie est additive, car on a évidemment

$$(\omega\rho_n) = (\omega_1\rho_n) + (\omega_2\rho_n),$$

si (ω) est divisé en portions (ω_1) et (ω_2).

La fonction

$$u_2(\omega) = u_1(\omega) - \vartheta_1(\omega)$$

n'a plus la ligne (L) pour une ligne singulière, car pour la ligne (L),

$$u_2(\rho_n)\,\rho_n = u_1(\rho_n)\,\rho_n - \vartheta_1(\rho_n)\,\rho_n = u_1(\rho_n)\,\rho_n - \lim u_1(\rho_n)\,\rho_n,$$

d'où suit que la limite de $u_2(\rho_n)\,\rho_n$ est égale à zéro.

En supposant que sur la surface singulière (S) il n'y a pas des lignes singulières de $u_2(\omega)$, on peut d'une manière analogue former la fonction $\chi_1(\omega)$ ayant posé

$$\chi_1(\omega)\,\omega = \lim u_2(\omega\rho_n)(\omega\rho_n),$$

où (ρ_n) est un domaine, ayant les points de la frontière d'une portion (σ) sur (S) sur sa frontière, tous les autres points de (σ) dans son intérieur et se tendant vers zéro en décroissant; $\chi(\omega)\,\omega = 0$, si (ω) et (ρ_n) n'ont pas des points communs intérieurs.

Les valeurs de $\chi_1(\omega)$ ne dépendent pas du choix des (ρ_n) sous la supposition faite à propos de (S); la fonction $\chi_1(\omega)$ est additive et la fonction

$$u_3(\omega) = u_2(\omega) - \chi_1(\omega)$$

n'a pas la surface (S) pour la surface singulière.

Nous avons définitivement

$$u_3(\omega) = u(\omega) - \theta_1(\omega) - \vartheta_1(\omega) - \chi_1(\omega).$$

On s'assure aisément que

$$u_3(\omega)\,\omega = \lim u_2(\underline{\omega})\,\underline{\omega},$$

le domaine $(\underline{\omega})$ n'ayant pas des points communs avec (S).

Si le domaine (ω) a des points communs avec (σ), nous écrirons encore $\lambda_1(\sigma)\sigma$ à la place de $\chi_1(\omega)\,\omega$, en la traitant comme une fonction des portions (σ) de (S).

Supposons que le potentiel newtonien

$$v(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} \tag{1}$$

étant donné, nous avons trouvé suivant les règles des §§ (6) et (7) les valeurs de $\Delta v(\omega)$ dans un corps (A) et, ensuite, construit d'après les règles des paragraphes suivants une fonction moyenne additive et à variation bornée $\Delta v(\omega)$ dans un corps $(B^{(1)})$. Le potentiel

$$v_1(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \Delta v(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} \tag{40}$$

ne diffère pas du potentiel (1) si le domaine (Ω_y) appartient au corps (A) suivant la remarque dans le § 9, car $-4\pi\,\underline{u}(\omega)$ et $\underline{\Delta v}(\omega)$ sont égales pour chaque domaine (ω).

Mais, si (Ω_y) n'appartient pas à (A), les fonctions $v(x)$ et $v_1(x)$ peuvent être différentes, car en formant $v_1(x)$ nous avons eu recours à des constructions inventées arbitrairement; en tout cas, si (Ω_y) appartient à $(B^{(1)})$, leur différence étant une fonction de la forme

$$\int\limits_{(S_1)} (\lambda(\sigma_1) - \lambda_1(\sigma_1))\frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \Sigma \int\limits_{(L_1)} (\nu(l) - \nu_1(l))\frac{dl}{r_{10}} + \Sigma(\mu^{(k)} - \mu_1^{(k)})\frac{1}{r_{10}}$$

est une fonction harmonique dans l'intérieur et dans l'extérieur de (Ω_y); on a, en effet,

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta w(\omega) = \theta(\omega) + \vartheta(\omega) + \chi(\omega) + w_4(\omega),$$
$$u(\omega) = \theta_1(\omega) + \vartheta_1(\omega) + \chi_1(\omega) + u_3(\omega)$$

et pour les domaines du corps (A) les valeurs de $w_4(\omega)$ et $u_3(\omega)$ sont égales.

14. Posons maintenant la question inverse: étant donné une fonction $v(x)$, sous quelles conditions cette fonction est égale à un potentiel newtonien?

Il suit des considérations des §§ 2, 3, 6, 7 que les conditions suivantes doivent être remplies nécessairement.

a) La fonction $v(x)$ doit être sommable dans tout espace et même, (a'), avoir un carré sommable.

b) La fonction $v(x)$ doit être sommable sur chaque portion d'une surface (σ) ayant dans chaque point un plan tangent déterminé.

(b') Si (σ) est une portionde la surface de la classe (C):

$$\left|\int_{(\sigma)} v(x_1)\,d\sigma - \int_{(\sigma)} v(x)\,d\sigma\right| < G\,|\delta|,\ \text{si}\,(\delta) < \delta_0$$

(x_1) étant un point sur la normale au point (x) sur (σ) à la distance (δ) de (x) et les nombres G, δ_0 dépendant exclusivement de (σ).

c) Dans le corps des domaines (ω), qui ont les frontières composées par un nombre fini des portions de surface, ayant en chaque point un plan tangent déterminé, la valeur moyenne de $v(x)$ dôit posséder les dérivées en chaque direction; ces dérivées sont les fonctions moyennes absolument continues dans le corps mentionné.

d) Dans un corps des domaines (ω), limités par les surfaces de la classe (C), la fonction $v(x)$ possède les flux $\sigma(v)$ à travers les frontières (σ) des domaines (ω); si l'on pose

$$\sigma(v)\,\sigma = \Delta v(\omega)\,\omega,$$

la fonction moyenne $\Delta v(\omega)\,\omega$ est à variation bornée dans le corps.

d') Dans un corps des domaines, limités par les surfaces de Liapounoff ou par les surfaces, formées d'un nombre fini des portions des surfaces de la classe (C), la fonction $v(\omega)$ possède les dérivées secondes $v''_{\xi\xi}(\omega)\ldots$ et le laplacien, qui est à variation bornée dans le corps; les variables, qui donnent en limite les dérivées $v''_{\xi\xi}(\omega)\ldots$, restent bornées pour les domaines, limités par les surfaces mentionnées, indépendamment, si (ω) appartiennent au corps ou non.

Comme nous nous occupons seulement des potentiels, étendus sur les domaines, n'ayant pas les points à l'infini, nous devons aux conditions (a), (b), (c), (d) ajouter encore la suivante.

e) Les flux à travers des frontières des domaines (ω), respectivement les laplaciens, restent égaux, si les domaines (ω) contiennent une sphère (R) d'un rayon assez grand.

En généralisant le problème, on peut cependant supposer que la fonction $v(x)$ n'est définie que dans un domaine (D) et chercher, sous quelle condition elle se comporte dans ce domaine comme un potentiel newtonien. Dans ce cas nous supposerons que

e') le domaine (D) appartient au corps des domaines définis dans les conditions (d), (d').

Nous démontrerons deux propositions: A) Si la fonction $v(x)$ vérifie les conditions (b), (d), (e), elle diffère d'un potentiel newtonien, si l'on néglige un terme additionnel égal à zéro presque partout, par une fonction harmonique; dans ce cas les conditions (a), (c) et (d') sont satisfaites. B) Si la fonction $v(x)$ vérifie les conditions (a), (c), (d'), (e), elle diffère d'un potentiel newtonien, si l'on néglige un terme additionnel, égal à zéro presque portout, par une fonction harmonique; dans ce cas les conditions (b) et (d) sont satisfaites.

Remarque. En parlant de l'espace tout entier, nous nommons la fonction harmonique, si elle est harmonique dans le sens ordinaire du mot dans chaque domaine ne contenant pas le point à l'infini; telles sont, par exemple, les fonctions

$$f(x) = C, \quad f(x) = \zeta, \quad f(x) = \xi^3 - 2\eta^2\xi - \zeta^2\xi \text{ etc.}$$

La présence d'un terme additionnel, qui est égal à zéro presque partout est à prévoir, car nous parvenons à $\Delta v(\omega)$ en utilisant seulement les valeurs moyennes de $v(x)$; or, en additionnant à $v(x)$ un pareil terme, on ne change pas sa valeur moyenne; dans le cas du problème (A), la mesure de ce terme sur chaque portion de surface de la condition (b) doit être nulle.

De même il est aussi à prévoir, que la différence entre $v(x)$ et le potentiel peut être égale à une fonction harmonique: le laplacien et le flux d'une telle fonction étant égaux à zéro, elle n'a aucune importance lors la formation de $\sigma(v)$ ou de $\Delta v(\omega)$.

Occupons-nous de la proposition (A). Si la condition (b) est satisfaite on peut étudier les flux à travers les surfaces de la classe (C); si l'on s'assure, que la condition (d) est satisfaite, on peut déterminer le flux $\sigma(v)$ à travers les frontières des domaines d'un corps (A) et, ayant formé $\Delta v(\omega) = w(\omega)$,

comme $w(\omega)$ est définie dans un corps (A), former en désignant par (R_y) un domaine contenant (Ω_y), le potentiel

$$(34') \qquad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(R_y)} w(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}.$$

Il reste à démontrer la proposition énoncée à propos de la différence entre $v(x)$ et le potentiel (34').

Nous la démontrerons sans peine en utilisant la methode des fonctions de Stekloff et en choisissant pour pareilles fonctions les fonctions utilisées par M. F. Riesz dans son mémoire maintes fois cité. Désignons par $h(x)$ la différence entre $v(x)$ et le potentiel (34'). Suivant la supposition, dans le corps (A) la fonction $h(x)$ possède un flux, qui est égal à zéro.

Prenons un point quelconque (x) et construisons une sphère (σ) du rayon r, ayant ce point pour centre. Il peut exister au plus une infinité dénombrable des valeur de r, pour lesquelles le flux à travers (σ) n'existe pas, c'est-à-dire, pour lesquelles la variable

$$(40) \qquad \frac{1}{\delta}\left(F(\sigma, h, \delta) - F(\sigma, h, 0)\right)$$

n'a pas une limite déterminée pour $\delta \to 0$; si cette limite existe, elle est égale à zéro.

Si l'on désigne par (ξ, η, ζ) les coordonnées du point (x) et si l'on pose $r + \delta = \rho$, on trouve, en utilisant les coordonnées polaires pour la fonction

$$F(\sigma, \tau, \delta) = \int\limits_{(\sigma)} h(x_1)\, d\sigma$$

l'expression

$$(41) \qquad F(\sigma, h, \delta) = r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\rho, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta,$$

où

$$h(\rho, \theta, \varphi) = h(\xi + \rho\cos\theta\cos\varphi,\ \eta + \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \zeta + \rho\sin\theta).$$

Le flux étant borné, la fonction (41) est une fonction continue de ρ suivant la remarque dans le § 7; la fonction

(42)
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\rho, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

l'est aussi.

En calculant la dérivée de la fonction (41), on trouve sans peine que cette dérivée est égale à

$$r^2 \lim \frac{1}{\delta} \left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(r+\delta, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(r, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \right\},$$

d'où l'on conclut que la fonction (42) possède presque partout une dérivée, qui est égale à zéro.

Dans chaque intervalle, dans l'intérieur duquel la fonction (42) a une dérivée, elle est constante; comme elle est continue dans le voisinage de chaque r, elle est égale à une constante $4\pi C$.

En multipliant (42) par ρ^2 et en intégrant de zéro à r, on trouve, si (ω) est la sphère du rayon r avec le centre en (x):

(43)
$$\int_{(\omega)} h(x)\, d\omega = \frac{4\pi r^3}{3} C = C\omega.$$

Suivant le théorème du § 8 (1) la limite du

(44)
$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} h(x)\, d\omega$$

pour $r \to 0$ est presque partout égale à $h(x)$; donc l'égalité

(45)
$$\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} h(x)\, d\omega = h(x)$$

subsiste presque partout.

Remarque. On démontre sans peine que l'égalité (45) a lieu dans tous les points, où $h(x)$ est continue, c'est-à-dire, entre autre, dans tous les points, où chacune des fonctions

$$v(x), \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{w(\tau)\, d\tau}{r_{10}}$$

est continue.

En posant

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} h(x)\, d\omega = h^*(x),$$

on peut remplacer sous le signe de l'intégrale $h(x)$ par $h^*(x)$, la différence entre $h^*(x)$ et $h(x)$ étant égale à zéro presque partout, et écrire, qu'on a partout

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} h^*(x)\, d\omega = h^*(x). \tag{45'}$$

Comme une des fonctions de Stekloff, l'intégrale dans la dernière égalité est une fonction continue de (x); la fonction $h^*(x)$ est donc continue.

En utilisant le procédé d'itération, nous obtenons

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} \left(\frac{1}{\omega'} \int\limits_{(\omega')} h^*(x)\, d\omega' \right) d\omega = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} h^*(x)\, d\omega = h^*(x);$$

il suit de là que $h^*(x)$ comme une seconde fonction de Stekloff possède les dérivées par rapport à ξ, η, ζ. En répétant le procédé d'itération on conclut que $h^*(x)$ possède les secondes dérivées qui sont continues.

La valeur de (45) étant indépendant de r, on trouve en dérivant

$$h^*(x) \frac{4\pi r^3}{3}$$

par rapport à r:

$$r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h^*(\xi + r\cos\theta\cos\varphi,\ \eta + r\cos\theta\sin\varphi,\ \zeta + r\sin\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= 4\pi r^2 h^*(x),$$

d'où suit, que

$$h^*(x) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} h^*(x)\, d\sigma.$$

La formation de flux nous conduit maintenant à l'égalité

$$\int_{(\sigma)} \frac{dh^*}{dn}\, d\sigma = \int_{(\omega)} \Delta\, h^*\, d\omega = 0,$$

qui montre que $h^*(x)$ est une fonction harmonique.

La fonction $h(x)$ diffère, donc, d'une fonction harmonique $h^*(x)$ par un terme additionnel, qui est égal à zéro presque partout, ce qu'il fallait démontrer.

Passons maintenant à la proposition (B). Ayant posé $\Delta v(\omega) = w(\omega)$ et formé le potentiel (34'), désignons par $h(x)$ la différence entre $v(x)$ et ce potentiel. Posons

$$(44') \qquad h(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} h(x)\, d\omega = h^*\,(x, r),$$

(ω) étant comme ci-dessus la sphère du rayon r avec le centre au point (x), ayant les coordonnées égales à ξ, η, ζ. La fonction $h^*(x, r)$ est continue comme fonction de (x) et de (r). On s'assure sans peine, que $h_\xi'(\omega) = \frac{dh^*}{d\xi}$, car le déplacement de (ω) dans la direction ξ à la distance δ est équivalent à la substitution du point $x_1(\xi + \delta, \eta, \zeta)$ à la place du point $x(\xi, \eta, \zeta)$. Suivant la condition (c), $h_\xi'(\omega)$ est une fonction continue de r.

On trouve de même, que les dérivées $\frac{\partial^2 h^*(x, r)}{\partial \xi^2}, \ldots$ existent, mais cette fois excepté quelque valeur de r

$$r_1,\ r_2,\ \ldots$$

dont l'ensemble est dénombrable. Pour les valeurs de r n'appartenant pas à cet ensemble, le laplacien $\Delta h(\omega) = \Delta h^*(x, r)$ existe et est égal à zéro.

Or les valeurs de r de l'ensemble mentionné dépendent du choix du point (x); à cause de cela on ne peut pas affirmer, que pour une valeur fixe de r la fonction $h^*(x, r)$ est harmonique dans un domaine des points (x). Pour éviter cet inconvénient, introduisons la fonction de Stekloff

$$H(x, r) = \frac{1}{\alpha} \int_r^{r+\alpha} h^*(x, \rho)\, d\rho$$

en choisissant α de manière que la différence

$$|H(x, r) - h^*(x, r)|$$

soit moindre qu'un nombre ε donné d'avance.

La variable tendant vers la seconde dérivée étant bornée, on trouve que

$$\frac{\partial H(x, r)}{d\xi} = \frac{1}{\alpha}\int_r^{r+\alpha} \frac{\partial h^*(x, \rho)}{\partial \xi} d\rho, \quad \frac{\partial^2 H(x, r)}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\alpha}\int_r^{r+\alpha} \frac{\partial^2 h^*}{\partial \xi^2} dr,$$

chaque intégrale

$$\int_{r_s-\eta_s}^{r_s+\eta_s} \frac{1}{\delta}\left(h_\xi'(x_1, \rho) - h_\xi'(x, \rho)\right) d\rho$$

étant moindre que ε_1^s pour un choix convenable de η_s.

Les dérivées secondes de $H(x, r)$ sont continues comme fonctions de r.

Il suit de tout cela que pour chaque r et chaque point (x):

$$\Delta H(x, r) = \frac{1}{\alpha}\int_r^{r+\alpha} \Delta h^*(x, \rho)\, d\rho = 0$$

et que la fonction $H(x, r)$ est une fonction harmonique de (x) pour chaque r.

Soit (ω_1) une sphère du rayon r_1 ayant le centre au point (x_1) et soit (σ_1) la frontière de (ω_1). La fonction $H(x, r)$ étant harmonique, on a

$$H(x, r) = \frac{1}{\sigma_1}\int_{(\sigma_1)} H(x, r)\, d\sigma_1.$$

Il suit de là que

$$\left|h^*(x, r) - \frac{1}{\sigma_1}\int_{(\sigma_1)} h^*(x, r)\, d\sigma_1\right| =$$

$$= \left|h^*(x, r) - H(x, r) - \frac{1}{\sigma_1}\int_{(\sigma_1)} \left(h^*(x, r) - H(x, r)\right) d\sigma_1\right| < 2\varepsilon$$

d'où l'on conclut, ε étant arbitraire, que pour chaque r:

(46) $$h^*(x, r) = \frac{1}{\sigma_1} \int\limits_{(\sigma_1)} h^*(x, r)\, d\sigma_1 .$$

En multipliant (46) par $\sigma_1 = 4\pi r_1^2$ et en intégrant par rapport à r_1, on trouve

$$h^*(x, r) = \frac{1}{\omega_1} \int\limits_{(\omega_1)} h^*(x, r)\, d\omega_1 .$$

Il suit de là que

$$h^*(x, r) = \frac{1}{\omega_1} \int\limits_{(\omega_1)} h^*(x, r)\, d\omega_1 = \frac{1}{\omega_1\, \omega} \int\limits_{(\omega_1)} \Big(\int\limits_{(\omega)} h(x)\, d\omega \Big)\, d\omega_1 =$$

$$= \frac{1}{\omega_1\, \omega} \int\limits_{(\omega)} \Big(\int\limits_{(\omega_1)} h(x)\, d\omega_1 \Big)\, d\omega = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} h^*(x, r_1)\, d\omega = h^*(x, r_1).$$

On a donc

$$h^*(x, r) = h^*(x, r_1);$$

la fonction $h^*(x, r)$ ne dépend pas de r; on peut écrire

$$h^*(x, r) = h^*(x).$$

L'égalité (46) prend la forme

(46') $$h^*(x) = \frac{1}{\sigma_1} \int\limits_{(\sigma_1)} h^*(x)\, d\sigma_1$$

et on conclut, comme ci-dessus, que la fonction $h^*(x)$ est harmonique. Or, la limite de $h(\omega)$ pour $r \to 0$ est presque partout égale à $h(x)$.

La fonction $h(x)$ diffère donc de la fonction harmonique $h^*(x)$ par un terme, qui est égal à zéro presque partout, ce qu'il fallait démontrer.

15. Si la densité $u(\omega)$ du potentiel

(1) $$v(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau) \frac{d\tau}{r_{10}}$$

a toutes ses valeurs positives, outre les propriétés (a), (b), (c), (d) et (d'), la fonction $v(x)$ possède les suivantes.

(I). La fonction $v(x)$ peut être traitée comme la limite d'une suite croissante des fonctions continues; c'est une conséquence immédiate des considérations du § 2.

Puis, on démontre aisément que (II) la fonction $v(x)$ est superharmonique.

Soit donnée, en effet, une surface de Liapounoff (S), qui délimite un domaine (ω). En désignant par $\Gamma(1, 0)$ la fonction harmonique, qui est égale à $\frac{1}{r_{10}}$ sur (S), (y) étant un point sur (S) et (x) un point quelconque, non situé sur (S), formons la fonction de Green

$$G(1, 0) = \frac{1}{r_{10}} - \Gamma(1, 0). \tag{46}$$

D'après le théorème du § 15 (7), la fonction

$$h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} v(2)\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\,d\sigma_2, \tag{47}$$

où nous désignons par (2) le point d'intégration, est harmonique dans l'intérieur du domaine, limité par (S), et la valeur moyenne de $h(x)$ sur une certaine portion (σ') de surface dans l'intérieur de (S) a pour limite $v(\sigma)$, quand (σ') tend vers une portion (σ) de (S).

En supposant que le point (x) est dans l'intérieur de (ω), donnons à (47) la forme

$$h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} v(\sigma_2)\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\,d\sigma_2. \tag{47'}$$

En substituant à la place de $v(\sigma_2)$ sa valeur tirée de (1), nous obtenons, en appliquant le théorème du § 9 (2),

$$h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\left(\int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\, m(\sigma_2, y)\,d\tau\right)d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_{(\Omega_y)} u(\tau)\left(-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} m(\sigma_2, y)\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\,d\sigma_2\right)d\tau.$$

Quand le point (x) est dans l'intérieur de (ω), la fonction

$$(48) \qquad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} m(\sigma_2, y)\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\,d\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} \frac{1}{r_{21}}\frac{dG(2, 0)}{dn_2}\,d\sigma_2$$

est une fonction continue du point (y), le second facteur sous le signe de l'intégrale dans (48) restant fini.

Or, la fonction (48) est une fonction harmonique dans (ω), pour laquelle la moyenne sur une portion de la surface (σ') dans l'intérieur de (ω) a pour limite $m(\sigma_2, y)$ quand (σ') tend vers (σ_2).

Si le point (y) est dans l'intérieur de (ω), cette condition est remplie par la fonction $\Gamma(1,0)$; si le point (y) est dans l'extérieur de (ω), cette condition est remplie par la fonction $\frac{1}{r_{10}}$; dans tous les cas la solution est unique, la fonction $\frac{1}{r_{10}}$ restant continue et bornée sur (S_2).

Il suit de là que, à cause de continuité de (48), cette fonction est égale à $\Gamma(1, 0)$ dans l'intérieur de (ω) et à $\frac{1}{r_{10}}$ dans son extérieur et sur sa frontière et que

$$(49) \qquad h(x) = \int\limits_{(\Omega_y-\omega)} u(\tau)\frac{1}{r_{10}}\,d\tau + \int\limits_{(\omega)} u(\tau)\Gamma(1, 0)\,d\tau.$$

La dernière formule conduit à l'égalité

$$(50) \quad v(x) - h(x) = \int\limits_{(\omega)} u(\tau)\left(\frac{1}{r_{10}} - \Gamma(1, 0)\right)d\tau = \int\limits_{(\omega)} u(\tau)G(1, 0)\,d\tau,$$

ce qui montre qu'on a dans (ω)

$$v(x) \geqq h(x),$$

les valeurs de $G(1, 0)$ étant positives.

Pour la brièveté nous donnerons à la fonction $h(x)$ le nom de la minorante de $v(x)$ pour le domaine (ω).

Les conditions (b), (d), (I) et (II), qui sont nécessaires pour que la fonction $v(x)$ diffère d'un potentiel newtonien par une fonction harmonique,

ne sont pas indépendantes. Dans son mémoire, cité plus haut, M. F. Riesz a montré que si l'on ajoute aux conditions (I) et (II) la condition:

(III). L'ensemble des points, où la fonction $v(x)$ est finie, est partout dense dans le domaine envisagé,* qui est certainement satisfaite, si la condition (a) subsiste, — on obtient les conditions, qui suffisent, sous une seule restriction additionnelle, d'où suit que les conditions (b), (d), en cas d'une fonction positive, ne sont que leurs conséquences.

16. Il est aisé de s'en assurer. Supposons, que les conditions (I), (II) et (III) sont remplies.

Il faut, cependant, préciser la condition (II). Comme la condition (b) n'entre pas dans nos données, il est encore impossible de parler d'une minorante de la fonction $v(x)$. Nous supposerons seulement, comme le fait M. F. Riesz, que (II') si sur la frontière du domaine (ω) on a $v(x) \geq h(x)$, $h(x)$ étant harmonique, cette inégalité subsiste dans l'intérieur du domaine.

De plus, nous nous bornerons, en appliquant la condition (II'), avec la considération des domaines, limités par les surfaces de Liappounoff; cela nous suffira pour achever la démonstration.

En supposant, que la fonction $v(x)$ est définie seulement dans l'intérieur d'un domaine (D), nous traiterons ainsi un problème plus général, que celui du § 14.

Aux conditions (I), (II') et (III) il faut ajouter encore la suivante: ayant démontré, que la condition (d) est satisfaite pour un corps (A) de domaines, appartenant au domaine (D) (éventuellement à tout l'espace) nous supposerons, que le domaine (D) est propre à la fonction $\Delta v(\omega)$; autrement, nous substituerons au domaine (D) un domaine (D_1) qui y est compris.

Supposons, que la fonction $v(x)$ est la limite de la suite

$$v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots\ v_n(x),\ \ldots$$

des fonctions croissantes et continues.

Soit (ω) un domaine, limité par une surface (S) de Liapounoff.

En cherchant dans l'intérieur de (ω) la fonction harmonique $h_n(x)$, qui prend sur (S) les valeurs égales à $v_n(x)$, nous obtenons

$$h_n(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} v_n(2)\frac{dG(2,0)}{dn_2}\,d\sigma_2. \tag{51}$$

* Acta mathematica, t. 48, p. 333.

Les fonctions $v_n(x)$ allant en croissant et la dérivée normale de la fonction de Green étant sur (S_2) négative, les fonctions $h_n(x)$ vont en croissant, d'où suit, que leurs suite a une limite $h(x)$. La supposition que cette limite est partout infinie est en contradiction avec la supposition (III): comme on a

$$v(x) \geqq v_n(x) = h_n(x)$$

sur la frontière de (ω), on aura $v(x) \geqq h_n(x)$ dans l'intérieur de (ω) et $v(x) \geqq h(x)$. Or, la fonction (51) étant croissante avec n et sa limite étant finie, on a pour cette limite l'expression

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} v(x_2)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma,$$

ce qui montre que la fonction $v(x_2)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}$ est sommable sur (S_2). Comme la fonction $\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}$ des points sur (S_2), étant négative, ne s'annule pas, on en conclut que la fonction $v(x_2)$ est elle-même sommable sur (S_2), c'est-à-dire que la condition (b) subsiste.

Entre autres nous avons démontré que la fonction $h(x)$, définie plus haut comme la limite des $h_n(x)$, est la minorante de $v(x)$ pour le domaine (ω).

Soit maintenant (x) un point appartenant au (D), dans lequel $v(x)$ est finie, et soient (S_ρ) les sphères des rayons ρ ayant les centres au point (x). Soit $h(x)$ la minorante pour le domaine limité par la sphère (S_{ρ_1}). Si $\rho_2 < \rho_1$, les valeurs de $v(x)$ sur (S_{ρ_2}) sont plus grandes que celles de $h(x)$, d'où suit que sur (S_{ρ_2}): $h(x) < v(x)$.

En introduisant les coordonnées polaires avec le pôle au point (x) et en remarquant, que

$$\frac{1}{4\pi\rho^2}\int\limits_{(S_\rho)} v(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} v(x)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

nous obtenons

(52)
$$\frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} v(\sigma_1)\,d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi\rho_2^2}\int\limits_{(S_{\rho_2})} v(\sigma_2)\,d\sigma_2 <$$
$$< \frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} h(\sigma_1)\,d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi\rho_2^2}\int\limits_{(S_{\rho_2})} h(\sigma_2)\,d\sigma_2.$$

La dernière intégrale dans (52) est égale à $h(x)$, la fonction h étant continue sur (S_{ρ_2}); en se rappelant le théorème du § 15 (7) et en l'appliquant pour évaluer $h(x)$ au cas d'une sphère, ce qui revient à l'application de la formule de Poisson, on trouve, que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} h(\sigma_1)\,d\sigma_1 = \frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} v(\sigma_1)\,d\sigma_1$$

est de même égale à $h(x)$. Il suit de là que

$$\frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} v(\sigma_1)\,d\sigma_1 < \frac{1}{4\pi\rho_2^2}\int\limits_{(S_{\rho_2})} v(x_2)\,d\sigma_2.$$

On conclut de là que la fonction de ρ_1:

$$\frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int\limits_{(S_{\rho_1})} v(x)\,d\sigma_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(x)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

est croissante quand ρ décroît et comme elle est égale à $h(x)$ correspondante, qui est plus petite que $v(x)$, elle reste finie.

Il suit de là que cette fonction est intégrable par rapport à ρ_1.

En la multipliant par ρ_1^2 et en l'intégrant de zéro à ρ, nous obtenons la valeur de

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\omega)} v(x)\,d\omega,$$

d'où suit que la fonction $v(x)$ est intégrable dans le voisinage du point (x). Or, l'ensemble des points (x) dans lesquels la fonction $v(x)$ est finie étant suivant (III) partout dense, on voit que la fonction $v(x)$ est intégrable dans le voisinage de chaque point.

Remarquons, encore, que de l'inégalité

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(x)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \leqq 4\pi\,v(x),$$

on conclut

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} v(x)\, d\omega \leqq v(x).$$

17. Passons maintenant à la condition (d). Nous commencerons par une remarque. Soit donné un domaine (ω) limité par une surface (S) de la classe (C). Désignons par (S_1) le lieu géométrique des points

(28) $\xi_1 = \xi + \delta\cos(N\xi),\quad \eta_1 = \eta + \delta\cos(N\eta),\quad \zeta_1 = \zeta + \delta\cos(N\zeta),$

où N est la normale extérieure au point $x(\xi, \eta, \zeta)$ sur (S).

Si la fonction $h(x)$ possède les dérivées dans les points intérieurs (ou extérieurs) de (ω), la fonction

(53) $$F_1(S, h, \delta) = \int\limits_{(S_1)} h(x_1)\, d\sigma_1 - \int\limits_0^\delta \left(\int\limits_{(S_1)} h(x_1) \frac{T'(\delta)}{T(\delta)}\, d\sigma_1\right) d\delta,$$

dans laquelle, suivant la convention du § 5, $T(\delta)$ est égale à $1 + \delta K + \delta^2 G$, K et G étant les courbures moyenne et totale de (S),—a une dérivée par rapport à δ pour toutes les valeurs de δ, si elles sont assez petites, excepté peut-être la valeur $\delta = 0$, et cette dérivée est égale à

$$\int\limits_{(S_1)} \frac{dh}{dn_1}\, d\sigma_1,$$

la dérivée $\frac{dh}{dn_1}$ étant calculée aux points de la surface (S_1).

Supposons maintenant que le domaine (ω) est limité par une ou par plusieurs surfaces fermées de la classe (C). Désignons par $h(x)$ la minorante de $v(x)$ dans le domaine (ω).

En supposant, que δ est négative, ainsi que les points (28) sont dans l'intérieur de (S), on a

$$v(\sigma) = h(\sigma), \quad v(\sigma_1) > h(\sigma_1)$$

et

(54) $$\frac{1}{\delta}(F(S, v, \delta) - F(S, v, 0)) = \frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)} v(x_1)\, d\sigma - \int\limits_{(S)} v(x)\, d\sigma\right) <$$

$$< \frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)} h(x_1)\, d\sigma - \int\limits_{(S)} h(x)\, d\sigma\right).$$

Or, on a

$$\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)} h(x_1)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} h(x)\,d\sigma\right) = \frac{1}{\delta}\left(F_1(S,\,h,\,\delta) - F_1(S,\,h,\,0)\right) -$$

$$-\int\limits_{(S)} h(x_1)(K+\delta G)\,d\sigma + \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta\left(\int\limits_{(S)} h(x_1)(K+2\delta G)\,d\sigma\right)d\delta.$$

On s'assure sans peine que le terme additive

$$\int\limits_{(S)} h(x_1)(K+\delta G)\,d\sigma - \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta\left(\int\limits_{(S)} h(x_1)(K+2\delta G)\,d\sigma\right)d\delta$$

est en valeur absolue moindre qu'un nombre ε donné d'avance, si $|\delta|$ est assez petite. En effet, il est égale à

$$\int\limits_{(S)} h(x_1)(K+\delta G)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} h(x_1')(K+2\delta' G)\,d\sigma,$$

où $0 < \delta' < \delta$ et (x_1') est un point sur la surface (S'_1), qui répond à la valeur de δ égale à δ'.

Pour prouver notre assertion, il suffit donc de démontrer que la variable

$$\int\limits_{(S)} h(x_1)\,K d\sigma$$

a une limite et que l'intégrale

$$\int\limits_{(S)} h(x_1)\,G d\sigma$$

est bornée en valeur absolue.

La démonstration de ces derniers points semble être intimement liée à la définition de la minorante.

Nous commençons par la démonstration de l'égalité

(55) $$\lim \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1)\,d\sigma_1 = \int\limits_{(\sigma)} h(x)\,d\sigma.$$

Cette égalité est une simple conséquence de l'égalité

$$\lim \int_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) \left(\int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{21} N_2)}{r_{21}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma_2 =$$

$$= \int_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) \left(\int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \right) d\sigma_2 + 2\pi\vartheta(\sigma)\sigma$$

dans laquelle (x_2) est le point d'intégration situé sur (S) et la fonction $\vartheta(\sigma)$ est continue. On l'établit aisément en reproduisant les raisonnements du 13 (5). On peut donner à la différence entre la limite et la variable la forme d'une somme

$$\int_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) \left\{ \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma - \int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1 \right\} d\sigma_2 +$$

$$+ \int_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) \left\{ \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma - \int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1 \right\} d\sigma_2.$$

Le premier terme de la somme est égal en limite à

$$-2\pi\vartheta(\sigma)\sigma.$$

Passons donc au second terme. Nous démontrerons que, uniformément sur (S_2):

$$\lim \int_{(\sigma_1)} \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_1 = \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma.$$

On peut donner à la différence entre la limite et la variable la forme

$$(56) \quad \int_{(\sigma)} \left\{ \frac{\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} - \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} (1 + K\delta + G\delta^2) \right\} d\sigma.$$

Or, la différence

$$(56)\quad \int\limits_{(\sigma)} \left\{ \frac{\cos(r_{20} N_2) - (\cos r_{20} N_0)}{r_{20}^2} - \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} (1 + K\delta + G\delta^2) \right\} d\sigma$$

a zéro pour limite.

Si la plus courte distance entre le point (x_2) et les points de (σ) est supérieure au nombre η, cela est évident, car r_{20} est fini et $\lim r_{21} = r_{20}$. Il reste à supposer que le point (x_2) est sur (σ) ou dans le voisinage de (σ).

Or, si l'on désigne par (2δ) la portion découpée de (σ) par une sphère au rayon $2|\delta|$, ayant pour centre le point (x_2), on voit que la différence (56′) est en valeur absolue plus petite que

$$(57)\quad \left| \int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} (1 + K\delta + G\delta^2) d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{(\sigma - 2\delta)} \left\{ \frac{\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} - \frac{\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)}{r_{21}^2} (1 + K\delta + G\delta^2) \right\} d\sigma \right| .$$

La normale dans le point (x_1) sur (S_1) étant parallèle à la normale dans le point correspondant (x) sur (S), on a

$$|\cos(r_{20} N_2) - \cos(r_{20} N_0)| < Er_{20}, \quad |\cos(r_{21} N_2) - \cos(r_{21} N_1)| < Er_{20}.$$

La première intégrale dans (57) est donc plus petite que

$$E \int\limits_{(2\delta)} \frac{d\sigma}{r_{20}} < 2 \cdot 2\pi \int_0^{2\delta} d\rho = 4\pi(2\delta);$$

la seconde intégrale est plus petite que

$$(1 + \delta A + \delta^2 A) \frac{E}{\delta^2} \int\limits_{(2\delta)} r_{20}\, d\sigma < 4E \frac{1 + \delta A + \delta^2 A}{\delta^2} \cdot 2\pi \int_0^{2\delta} \rho^2 d\rho =$$

$$= 64\pi\delta E(1 + \delta A + \delta^2 A).$$

A étant la borne supérieure des $|K|$ et $|G|$.

Suivant le § 13 (5) on peut donner à la fonction sous le signe de la troisième intégrale la forme

$$(58)\quad |\delta|\left\{\frac{\cos(N_0 N_2)-1}{r_{21}^3}\right\}+\left(\cos(r_{20}N_2)-\cos(r_{20}N_0)\right)\frac{(r_{21}^2+r_{21}r_{20}+r_{20}^2)(r_{21}-r_{20})}{r_{21}^3 r_{20}^2}.$$

$$+\frac{\cos(r_{21}N_2)-\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2}(K+\delta G)\cdot\delta.$$

Comme maintenant $r_{21}>\frac{1}{2}r_{20}$, l'intégrale du premier terme dans (58) est plus petite que

$$8E|\delta|\int\limits_{(\sigma-2\delta)}\frac{d\sigma}{r_{10}^2}<8\cdot 8E|\delta|\int\limits_{|\delta|}^{d}\frac{d\rho}{\rho}<a|\delta|\log|\delta|.$$

Le second terme dans (58) est plus petit que le nombre de la forme $\frac{\delta}{r_{20}^2}$ et l'intégrale correspondante a la même borne; l'intégrale du troisième terme étant plus petite que

$$8\cdot|\delta|\int\limits_{(\sigma-2\delta)}\frac{(A+\delta A)\,d\sigma}{r_{20}^2}$$

est aussi infiniment petite.

La fonction $h(x)$ comme la minorante de $v(x)$ est égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\vartheta(\sigma_2)\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\,d\sigma_2,$$

où la fonction $\vartheta(\sigma)$ satisfait à l'équation

$$\vartheta(\sigma)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\vartheta(\sigma_2)\,l(\sigma,\,2)\,d\sigma_2+\frac{v(\sigma)}{2\pi}.$$

Il suit de cela que $\vartheta(\sigma)$ est continue.

Nous avons donc:

$$\lim\int\limits_{(\sigma_1)}h(x_1)\,d\sigma_1=\lim\int\limits_{(S_2)}\vartheta(\sigma_2)\left(\int\limits_{(\sigma_1)}\frac{\cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2}\,d\sigma_1\right)d\sigma_2=$$

$$= \int\limits_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) \Bigl(\int\limits_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \Bigr) d\sigma_2 + 2\pi \vartheta(\sigma) \sigma =$$

$$= \int\limits_{(S_2)} \vartheta(\sigma_2) l(\sigma, 2) \sigma \, d\sigma + 2\pi \vartheta(\sigma) \sigma = v(\sigma) \sigma = \int\limits_{(\sigma)} h(x) \, d\sigma$$

ce qu'il était à démontrer.

L'égalité (55) étant démontrée, nous concluons en premier lieu, que l'intégrale

$$\int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) \, d\sigma_1$$

est bornée. Les valeurs de $h(x)$ étant positives sur (S), si $|\delta|$ est moindre qu'un nombre δ_0, les valeurs de $h(x_1)$ sont positives. On en conclut que pour $|\delta| < \delta_0$:

$$\Bigl| \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) K d\sigma_1 \Bigr| < \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) |K| \, d\sigma_1 < A \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) \, d\sigma_1,$$

$$\Bigl| \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) G d\sigma_1 \Bigr| < A \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) \, d\sigma_1.$$

Les intégrales

$$\int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) K d\sigma_1, \quad \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) G d\sigma_1$$

sont bornées. Si pour $|\delta| < \delta_0$ on a

$$\frac{1}{2} < T(\delta) < \frac{3}{2},$$

on a

$$\Bigl| \int\limits_{(\sigma)} h(x_1) K d\sigma \Bigr| < 2 \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) |K| \, d\sigma_1 < 2A \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) \, d\sigma_1,$$

$$\Bigl| \int\limits_{(\sigma)} h(x_1) G d\sigma \Bigr| < 2A \int\limits_{(\sigma_1)} h(x_1) \, d\sigma_1.$$

Les intégrales

$$\int_{(\sigma)} h(x_1)\, K d\sigma, \quad \int_{(\sigma)} h(x_1)\, G d\sigma$$

sont donc aussi bornées. On conclut de là que

$$\lim \int_{(\sigma)} h(x_1)\, d\sigma = \lim \int_{(\sigma_1)} h(x_1)\, d\sigma_1 - \lim \delta \int_{(\sigma)} h(x_1)\, K d\sigma - \lim \delta^2 \int_{(\sigma)} h(x_1)\, G d\sigma =$$

$$= \lim \int_{(\sigma)} h(x_1)\, d\sigma_1 .$$

Nous avons finalement l'égalité

$$\text{(55')} \qquad \lim \int_{(\sigma)} h(x_1)\, d\sigma = \int_{(\sigma)} h(x)\, d\sigma.$$

Pour démontrer que

$$\text{(59)} \qquad \lim \int_{(S)} h(x_1)\, K d\sigma = \int_{(S)} h(x)\, K d\sigma,$$

décomposons (S) en portions $(\sigma^{(1)}), \ldots, (\sigma^{(n)})$ de manière que dans chacune d'entre elles l'oscillation de K soit moindre que ε. En désignant par

$$h(\sigma), \quad h^{(1)}(\sigma)$$

les moyennes

$$\frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} h(x)\, d\sigma, \qquad \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} h(x_1)\, d\sigma$$

remarquons qu'on peut écrire

$$\int_{(S)} h(x_1)\, K d\sigma = \int_{(S)} h^{(1)}(\sigma)\, K d\sigma, \quad \int_{(S)} h(x)\, K d\sigma = \int_{(S)} h(\sigma)\, K d\sigma.$$

En utilisant l'égalité (55') supposons que δ est assez petite pour qu'on ait

$$\text{(59')} \qquad |h(\sigma^{(i)}) - h^{(1)}(\sigma^{(i)})|\, \sigma^{(i)} < \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Les valeurs de $h(\sigma)$ et $h^{(1)}(\sigma)$ étant positives, nous pouvons écrire

$$\int_{(S)} h(x)\, K d\sigma = \sum_{i=1}^{i=n} K(x_i')\, h(\sigma^{(i)})\, \sigma^{(i)}$$

$$\int_{(S)} h(x_1) K d\sigma = \sum_{i=1}^{i=n} K(x_i'')\, h^{(1)}(\sigma^{(i)})\, \sigma^{(i)}$$

(x_i') et (x_i'') étant certains points situés sur $(\sigma^{(i)})$.

En se souvenant que l'oscillation de K sur (σ_i) est moindre que ε et en utilisant l'égalité (59′), on conclut de là que

$$\left| \int_{(S)} h(x_1)\, K d\sigma - \int_{(S)} h(x)\, K d\sigma \right| < \varepsilon\, H(S) S + A\varepsilon = \varepsilon\, v(S) S + A\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'inégalité (54) a donc pour les valeurs de (δ) assez petites la forme

$$\frac{1}{\delta}\left(\int_{(S)} v(x_1)\, d\sigma - \int_{(S)} v(x)\, d\sigma \right) < \frac{1}{\delta}\left(F_1(S,\, h,\, \delta) - F_1(S,\, h,\, 0)\right) + a\varepsilon =$$

$$= \int_{(S_1')} \frac{dh}{dn_1'}\, d\sigma_1' + a\varepsilon,$$

a étant un nombre détérminé.

Or, la surface (S_1') étant dans l'intérieur de (ω) et la fonction $h(x)$ y étant harmonique, on a

$$\int_{(S_1')} \frac{dh}{dn_1'}\, d\sigma_1' = 0,$$

d'où il suit que

(60) $$\overline{\lim}\, \frac{1}{\delta}\left(F(S,\, v,\, \delta) - F(S,\, v,\, 0)\right) \leqq 0.$$

Il suit de là en premier lieu que:

1) si le flux existe, il est négatif.

En remarquant que dans le voisinage de chaque frontière séparée on peut choisir δ indépendamment du choix, qui est fait dans le voisinage des autres, on conclut en second lieu

2) soient (S') et (S) deux surfaces de la classe (C), dont la seconde est dans l'intérieur de la première; l'inégalité (60) donne

$$(60')\quad \overline{\lim}\, \frac{1}{\delta}\left(F(S', v, \delta) - F(S', v, 0)\right) \leqq \underline{\lim}\, \frac{1}{\delta}\left(F(S, v, \delta) - F(S, v, 0)\right),$$

si l'on prend la direction de la normale dans les points de (S) vers (S'), ce qui nous conduit à supposer que δ dans la partie droite est positive. L'inégalité (60′) montre, que si le flux existe, le flux par la surface extérieure est plus petit que celui pour la surface intérieure.

Nous supposerons, que si (S') tend vers la frontière du domaine (D) (ou vers une des surfaces formant la frontière de (D), si la frontière de (D) est composée par plusieurs surfaces),

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{\delta}\left(F(S', v, \delta) - F(S', v, 0)\right), \quad \text{resp. } \underline{\lim}\, \frac{1}{\delta}\left(F(S, v, \delta) - F(S, v, 0)\right)$$

dans le cas d'une frontière extérieure, respectivement dans le cas d'une frontière intérieure, restent finies; sans cela nous choisirons à la place du domaine (D) un autre domaine (D_1) contenu dans (D).

On conclut de cette supposition que pour chaque surface (S) de la classe (C) le rapport

$$\frac{1}{\delta}\left(\int_{(S)} v(x_1)\, d\sigma - \int_{(S)} v(x)\, d\sigma\right)$$

reste fini, d'où il suit que

$$\lim \int_{(S)} v(x_1)\, d\sigma = \int_{(S)} v(x)\, d\sigma, \quad \delta \to 0.$$

18. Supposons que (S) est une surface de la classe (C), (S_1) le lieu géometrique des points (28), (S_0) une surface contenant (S_1) dans son intérieur, ou, respectivement, contenue dans (S_1). Soit $h_0(x)$ la minorante de $v(x)$ dans le domaine limité par les surfaces (S) et (S_0).

Suivant les remarques du § 17

$$(61)\quad \begin{gathered} \text{si } |\delta| < \delta_1 : \; -\varepsilon < \int_{(S)} h_0(x_1)\, d\sigma - \int_{(S)} h_0(x)\, d\sigma < \varepsilon, \\ -\varepsilon B < \int_{(S)} h_0(x_1)\, K d\sigma - \int_{(S)} h_0(x)\, K d\sigma < \varepsilon B. \end{gathered}$$

Supposons que

$$-\varepsilon < \int_{(S)} v(x_1)\,d\sigma - \int_{(S)} v(x)\,d\sigma < \varepsilon, \quad \text{si } |\delta| < \delta_0.$$

La fonction $h_0(x)$ étant la minorante de $v(x)$, on a, comme $h_0(x) = v(x)$:

$$(v(x_1) - h_0(x_1)) - (v(x) - h_0(x)) > 0.$$

Il suit de là que

$$\left|\int_{(S)} \left\{(v(x_1) - h_0(x_1)) - (v(x) - h_0(x))\right\} K d\sigma\right| <$$

$$< \int_{(S)} \left\{(v(x_1) - h_0(x_1)) - (v(x) - h_0(x))\right\} |K|\, d\sigma <$$

$$< A \int_{(S)} \left\{(v(x_1) - v(x)) - (h_0(x_1) - h_0(x))\right\} d\sigma <$$

$$< BA\varepsilon + \varepsilon A = A_1\varepsilon, \quad \text{si } |\delta| < \delta_2,$$

δ_2 étant le plus petit des nombres δ_0 et δ_1.

On obtient ainsi

$$(62) \qquad -C\varepsilon < \int_{(S)} v(x_1)\, K d\sigma - \int_{(S)} v(x)\, K d\sigma < C\varepsilon, \quad \text{si } |\delta| < \delta_2.$$

Soit maintenant $h(x)$ la minorante de $v(x)$ pour le domaine limité par (S) et (S_1). La fonction harmonique $h(x) - h_0(x)$ est égale à zéro sur (S) et est positive sur (S_1); on a donc

$$h(x) - h_0(x) \geqq 0.$$

Si (x_1') est un point, situé sur la surface (S') correspondante à la valeur δ_1' de δ, où $|\delta'_1| \leqq \delta_2$, on a

$$\left|\int_{(S)} (h(x_1') - h_0(x_1'))\, K d\sigma\right| < \int_{(S)} (h(x_1') - h_0(x_1'))\, |K|\, d\sigma <$$

$$< A \int_{(S)} (v(x_1') - h_0(x_1'))\, d\sigma =$$

$$= A \left[\left\{\int_{(S)} v(x_1')\, d\sigma - \int_{(S)} v(x)\, d\sigma\right\} - \left\{\int_{(S)} (h_0(x_1') - h_0(x))\, d\sigma\right\}\right] < 2A\varepsilon.$$

Il suit de lú que

(62') $$\left|\int\limits_{(S)} h(x_1')\,Kd\sigma - \int\limits_{(S)} v(x)\,Kd\sigma\right| < 2A\varepsilon + \\ + \left|\int\limits_{(S)} h_0(x_1')\,Kd\sigma - \int\limits_{(S)} v(x)\,Kd\sigma\right| < C_1\varepsilon, \quad |\delta_1'| \leqq \delta_2.$$

Les inégalités (62) et (62') conduisent finalement à l'inégalité

(63) $$\left|\int\limits_{(S)} v(x_1)\,Kd\sigma - \int\limits_{(S)} h(x_1')\,Kd\sigma\right| < C_2\varepsilon, \quad \delta_1'| \lesseqgtr \delta_2,$$

le nombre C_2 étant indépendant du choix des surfaces (S_0), (S_1).

Remarquons encore, que $v(x)$ et $h(x)$ étant positives et les intégrales

$$\int\limits_{(S)} v(x_1)\,d\sigma, \quad \int\limits_{(S)} h(x_1')\,d\sigma$$

bornées, les intégrales

$$\left|\delta \int\limits_{(S)} v(x_1)\,Gd\sigma\right|, \quad \left|\delta \int\limits_{(S)} h(x_1')\,Gd\sigma\right|$$

sont moindres qu'un nombre de la forme $|\delta|AB$, qu'on peut, en choisissant convenablement δ_2, faire moindre que ε.

Donnons maintenant à δ deux valeurs, l'une positive δ et l'autre négative δ', en supposant que

$$\delta < \delta_2, \quad |\delta'| < \delta_2.$$

Désignons par $\overline{h}(x)$ la minorante pour le domaine, limité par (S_1) et (S) et par $\underline{h}(x)$ la minorante pour le domaine, limité par (S) et (S_2), (S_2) étant la surface correspondante à δ'. Nous avons

(64) $$\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)} v(x_1)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} v(x)\,d\sigma\right) - \frac{1}{\delta'}\left(\int\limits_{(S)} v(x_2)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} v(x)\,d\sigma\right) = \\ = \frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)} \overline{h}(x_1)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} \overline{h}(x)\,d\sigma\right) - \frac{1}{\delta'}\left(\int\limits_{(S)} \underline{h}(x_2)\,d\sigma - \int\limits_{(S)} \underline{h}(x)\,d\sigma\right).$$

En utilisant les inégalités obtenues ci-dessus, nous pouvons, en l'augmentant, transformer la partie droite de (64) en

$$\frac{1}{\delta}\left[\left(\int\limits_{(S_1)}\bar{h}(x_1)\,d\sigma_1-\int\limits_{(S)}\bar{h}(x)\,d\sigma\right)-\int\limits_0^{\delta}\left(\int\limits_{(S_1)}\bar{h}(x_1)\,T''(\delta)\,d\sigma\right)d\delta\right]-$$

$$-\frac{1}{\delta'}\left[\left(\int\limits_{(S_2)}\underline{h}(x_2)\,d\sigma_2-\int\limits_{(S)}\underline{h}(x)\,d\sigma\right)-\int\limits_0^{\delta}\left(\int\limits_{(S_2)}\underline{h}(x_2)\,T''(\delta)\,d\sigma\right)d\delta\right]+H\varepsilon;$$

cette transformation est, en effet, équivalente à l'adjonction du terme

$$\left(\int\limits_{(S)}\bar{h}(x_1)\,(K+\delta G)\,d\sigma-\int\limits_{(S)}\bar{h}(x_1')\,(K+2\delta_1'G)\,d\sigma\right)-$$

$$-\left(\int\limits_{(S)}\underline{h}(x_2)\,(K+\delta' G)\,d\sigma-\int\limits_{(S)}\underline{h}(x_2')\,(K+2\delta_2'G)\,d\sigma\right)$$

qui, suivant les inégalités établies plus haut, est plus petit en valeur absolue que

$$C_2\varepsilon+2\varepsilon+C_2\varepsilon+2\varepsilon=H\varepsilon.$$

On obtient donc finalement: si $\delta<\delta_2$, $|\delta'|<\delta_2$:

(64′)
$$\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(S)}v(x_1)\,d\sigma-\int\limits_{(S)}v(x)\,d\sigma\right)-\frac{1}{\delta'}\left(\int\limits_{(S)}v(x_2)\,d\sigma-\int\limits_{(S)}v(x)\,d\sigma\right)<$$

$$<\int\limits_{(\overline{S})}\frac{dh}{dn'}\,d\sigma'-\int\limits_{(\underline{S})}\frac{d\underline{h}}{dn_1'}\,d\sigma_1'+H\varepsilon,$$

$(\overline{S})$ et $(\underline{S})$ étant certaines surfaces situées respectivement entre (S_1) et (S) et entre (S) et (S_2).

Or, on démontre sans peine que la différence en partie droite de (64′) est négative.

C'est le théorème principal de M. F. Riesz, démontré par lui dans la première partie de son mémoire.

Voici, brièvement, sa démonstration. Soit h_2 la minorante pour le domaine limité par (S_2) et (S_1); on a

$$h_2(\sigma_1) = \overline{h}(\sigma_1), \quad h_2(\sigma_2) = \underline{h}(\sigma_2),$$

d'où suit, les fonctions $h_2(x) - \overline{h}(x)$, $h_2(x) - \underline{h}(x)$ étant continues, qu'au voisinage de (S_1), respectivement de (S_2), elles sont aussi près de zéro qu'on le veut. Or, on a

$$(65) \qquad \int_{(\overline{S})} \left(\frac{d\overline{h}}{dn'} - \frac{dh_2}{dn'} \right) d\sigma' < 0, \quad \int_{(\underline{S})} \left(\frac{dh_2}{dn_1'} - \frac{d\underline{h}}{dn_1'} \right) d\sigma_1' < 0.$$

Effectivement, la différence $\overline{h} - h_2$ est positive et la différence $h_2 - \underline{h}$ est négative dans le voisinage de (S) et comme $\underline{h} - h_2$ et $h_2 - \overline{h}$ sont harmoniques dans les domaines, où elles sont définies, on peut, sans changer les valeurs des intégrales (65) prendre à la place de $(\overline{S})$ une surface aussi voisine de (S_1) qu'on le voudra et à la place de $(\underline{S})$ une surface voisine de (S_2); mais, si on se déplace dans la direction des normales à (S_1) et (S_2) à l'intérieur du domaine, la fonction $\overline{h} - h_2$ croît, d'où suit que la première intégrale (65) est négative, les dérivées étant prises dans la direction extérieure au domaine; la fonction $h_2 - \underline{h}$ décroit, d'où suit que la seconde intégrale (65) est également négative.

Il s'en suit, les variables δ et δ' étant indépendantes, que

$$(66) \quad \overline{\lim} \frac{1}{\delta} (F(S, v, \delta) - F(S, v, 0)) \leqq \underline{\lim} \frac{1}{\delta'} (F(S\, v, \delta') - F(S, v, 0)).$$

On peut généraliser l'inégalité (66).

Soit (σ) une portion de (S). On démontre sans peine que l'inégalité (66) subsiste, quand on y substitue (σ) à la place de (S).

Soit (x_2) un point sur $(S - \sigma)$; formons suivant les règles du § 10 la fonction moyenne $\theta(\omega)$ ayant le point (x_2) pour point singulier avec la masse μ, en laissant pour un court moment μ indéterminée. En désignant par (ω) le domaine, limité par (S), posons après cela

$$w(x) = \int_{(\omega)} \frac{\theta(\tau)\, d\tau}{r_{10}} = \frac{\mu}{r_{20}}.$$

Suivant les considérations du § 7, on trouve en désignant par $C(\Sigma, v)$ l'expression

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{\delta}\left(F(\Sigma, v, \delta) - F(\Sigma, v, 0)\right) - \underline{\lim}\,\frac{1}{\delta'}\left(F(\Sigma, v, \delta') - F(\Sigma, v, 0)\right),$$

que pour $(\Sigma) = (\sigma)$ on a $C(\sigma, w) = 0$, car $w(x)$ est harmonique dans le voisinage de (σ) et que pour $(\Sigma) = (S - \sigma)$, on a $C(S - \sigma, w) = -4\pi\mu$, car on a

$$\underline{\lim}\,\frac{1}{\delta'}\left(F(S, w, \delta') - F(S, w, 0)\right) = 0,$$

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{\delta}\left(F(S, w, \delta) - F(S, w, 0)\right) = -4\pi\mu.$$

Si l'on choisit μ de manière qu'on ait

$$C(S - \sigma, v) + C(S - \sigma, w) = 0$$

on trouve

$$C(S, v + w) =$$

$$= \overline{\lim}\,\frac{1}{\delta}\left(F(\sigma, v, \delta) - F(\sigma, v, 0)\right) - \underline{\lim}\,\frac{1}{\delta'}\left(F(\sigma, v, \delta') - F(\sigma, v, 0)\right).$$

Or, suivant la formule (66) $C(S, v + w)$ n'est pas positive; donc l'inégalité (66) subsiste, si on y substitue (σ) à la place de (S).

19. Soit donnée maintenant une surface quelconque fermée (Σ), qui est l'une des frontières d'un domaine (ω), et formons suivant la règle décrite dans la remarque du § 8 un domaine variable $(\underline{\omega})$ inscrit dans (ω), en supposant que toutes les frontières de $(\underline{\omega})$, excepté celle, qui a (Σ) pour limite, ne changent pas; nous traitons $(\underline{\omega})$ comme une fonction croissante de $t = \omega - \underline{\omega}$ et nous supposons, que parmi ses valeurs il y a une infinité non dénombrable ayant pour frontière une surface de la classe (C).

En désignant par $S(t)$ la frontière de $(\underline{\omega})$, qui tend vers (Σ), définissons après cela une fonction de t

$$S(v)\,S(t) = \varphi(t)$$

en posant pour chaque t

$$\varphi(t - 0) = \underline{\lim}\,\frac{1}{\delta'}\left(F(S, v, \delta') - F(S, v, 0)\right),$$

$$\varphi(t + 0) = \overline{\lim}\,\frac{1}{\delta}\left(F(S, v, \delta) - F(S, v, 0)\right).$$

La fonction $\varphi(t)$ étant décroissante et bornée, il n'y a qu'une infinité dénombrable des valeurs de t, pour lesquelles elle est discontinue. Il suit de là, que pour une infinité non dénombrable des valeurs de t dans (66) subsiste le signe d'égalité, c'est-à-dire, que pour une infinité non dénombrable des surfaces de la classe (C), tendant vers une surface (Σ), les flux existent. Nous nommerons les surfaces de la classe (C) pour lesquelles les flux existent, les surfaces de la classe $C(v)$.

Ces flux décroissent, quand t croît, en restant bornés en valeur absolue, d'où il suit qu'ils ont une limite. Désignons cette limite par $\underline{\Sigma}(v)\Sigma$.

On démontre de même l'existence des flux pour une infinité non dénombrable des surfaces de la classe (C), circonscrites autour de (Σ) et l'existence de leur limite $\overline{\Sigma}(v)\Sigma$.

Si

$$\underline{\Sigma}(v)\Sigma = \overline{\Sigma}(v)\Sigma,$$

nous dirons que le flux existe pour la surface (Σ).

Remarquons que, si (S') et (S) sont deux surfaces de la classe $C(v)$, circonscrite autour et inscrite à (Σ), comme le flux par (S') est plus petit que par (S), on a dans tous les cas

$$\underline{\Sigma}(v)\Sigma \geqq \overline{\Sigma}(v)\Sigma.$$

Si (σ) est la portion de (Σ) et si nous désignons par (σ') et (σ'') les portions des surfaces (S') et (S), qui tendent vers (σ) et par $\underline{\sigma}(v)\sigma$, $\overline{\sigma}(v)\sigma$ les limites des flux à travers d'elles, on a

$$\underline{\sigma}(v)\sigma \geqq \overline{\sigma}(v)\sigma.$$

Soit (σ) une portion de surface de la classe $C(v)$ et formons, comme dans le § 5, la variable

$$\frac{1}{\delta}(F(\sigma, v, \delta) - F(\sigma, v, 0));$$

on démontre sans peine que

$$\overline{\lim}\frac{1}{\delta}(F(\sigma, v, \delta) - F(\sigma, v, 0)) - \underline{\lim}\frac{1}{\delta'}(F(\sigma, v, \delta') - F(\sigma, v, 0)) = 0.$$

La différence étant égale à zéro pour la surface entière et n'étant pas positive pour chacune de ses portions, elle ne peut pas rester négative.

20. Nous dirons que les surfaces, pour lesquelles on a

$$\underline{\sigma}(v)\,\sigma = \overline{\sigma}(v)\,\sigma$$

forment la classe (F). Les domaines limités par les surfaces (F) forment un corps. Les raisonnements qui précèdent montrent que la première des conditions du § 9 est satisfaite. Il reste à vérifier que les deux suivantes le sont aussi.

Si le domaine (ω), appartenant au corps, est divisé par une portion de la surface en deux portions (ω_1) et (ω_2), dont la première appartient au corps, la seconde lui appartient également.

Pour le démontrer, remarquons en premier lieu que si la surface (S) appartient à la classe (F) et si la surface (S') tend vers (S) d'une manière quelconque, les limites $\underline{S'(v)}\,S'$, $\overline{S'(v)}\,S'$ tendent vers $S(v)\;S$, car chaque surface (S') tendant vers (S) est située entre deux surfaces de la classe $C(v)$, qui tendent vers (S).

Soit maintenant $(\underline{\omega_2})$ un domaine inscrit dans (ω_2) et limité par une surface (S_2') de la classe $C(v)$; supposons que la portion (σ_2) de (S_2') tend vers la frontière commune des domaines (ω_1) et (ω_2). En prolongeant (σ_2) on peut construire une surface (S_1'), tendant vers la frontière (S_1) de (ω_1). Les portions de (S_1') et (S_2'), qui sont complémentaires à (σ_2), forment une surface (S'), tendant vers (S), (S) étant la frontiere de (ω). Or, on a

$$\underline{S_1'(v)}\,S_1' + S_2'(v)\,S_2' = \underline{S'(v)}\,S', \tag{67}$$

car les flux par la portion (σ_2) dans la partie gauche de (67) se détruisent.

On trouve, en passant dans (67) vers la limite, que, si (S_2) est la frontière de (ω_2)

$$S_1(v)\,S_1 + \underline{S_2(v)}\,S_2 = S(v)\,S.$$

On démontre de la même manière, en envisageant un domaine $(\overline{\omega}_2)$ contenant (ω_2), que

$$S_1(v)\,S_1 + \overline{S_2(v)}\,S_2 = S(v)\,S$$

d'où suit, que le domaine (ω_2) appartient effectivement au corps.

la densité $u(\tau)$ est certaine, la fonction $v(x)$ est égale à la différence des deux fonctions

$$v_1(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u_1(\tau) \frac{d\tau}{r_{10}}, \quad v_2(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} u_2(\tau) \frac{d\tau}{r_{10}},$$

qui sont semi-continues et superharmoniques; ici $u_1(\tau)$ et $u_2(\tau)$ sont les parties positive et négative de $u(\omega)$.

Les considérations du § 14, montrant quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $v(x)$ soit la différence entre deux fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$, semi-continues et superharmoniques, donnent aussi le moyen de construire les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$.

CHAPITRE 9

Sur quelques problèmes relatifs au laplacien

1. Proposons-nous de trouver un potentiel de simple couche

(1) $$v = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_1)} \frac{\mu(\sigma_1)\, d\sigma_1}{r_{10}},$$

répandu sur la surface (S) de Liapounoff, tel qu'on ait sur la surface

(2) $$\sigma^{(i)}(v) = -(hv)_\sigma + u(\sigma),$$

$u(\sigma)$ étant une fonction additive, à variation bornée et continue des portions (σ) de (S), (σ) une portion de (S), $\sigma^{(i)}(v)$, suivant la convention du chapitre 5, le flux moyen à travers (σ) et $(h\sigma)_\sigma$ la moyenne de produit

$$h(x)\, v;$$

nous choisissons cette désignation, la désignation employée ci-dessus devenant incommode, quand il s'agit du produit.

Nous désignons par $h(x)$ une fonction bornée et intégrable en sens de Riemann sur (S), dont les valeurs ne sont pas négatives; nous supposons, en tout cas, que

(3) $$\int\limits_{(S)} h(x)\, d\sigma > 0.$$

Soit donnée une portion (σ) de (S). Si $\mu(\sigma)$ est continue dans le voisinage de la frontière de (σ), on a, suivant le théorème du § 5 (5)

$$\sigma^{(i)}(v) = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) k_1(\sigma, 1)\, d\sigma_1 + \mu(\sigma),$$

ayant posé

$$k_1(\sigma, 1)\,\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2}\, d\sigma.$$

Le potentiel de simple couche peut être traité comme un potentiel newtonien, si l'on effectue la transformation du § 4 (5). On conclut de là, que

$$(hv)_\sigma = \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1)\, m(\sigma, h, 1)\, d\sigma_1,$$

si l'on pose

$$m(\sigma, h, 1) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{(\sigma)} \frac{h(x)}{r_{10}}\, d\sigma.$$

La fonction $h(x)$ étant bornée, $m(\sigma, h, 1)$ est une fonction continue du point (y) dans tout l'espace.

En substituant dans (2) les valeurs trouvées pour $\sigma^{(i)}(v)$ et $(hv)_\sigma$ on obtient

$$\mu(\sigma) = -\int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \{k_1(\sigma, 1) + m(\sigma, h, 1)\}\, d\sigma_1 + u(\sigma);$$

$\mu(\sigma)$ est, donc, la solution de l'équation intégrale

(4) $$\mu(\sigma) = \lambda \int_{(S_1)} \mu(\sigma_1) \{k_1(\sigma, 1) + m(\sigma, h, 1)\}\, d\sigma_1 + u(\sigma)$$

pour $\lambda = -1$.

Le noyau

(5) $$q(\sigma, y) = k_1(\sigma, 1) + m(\sigma, h, 1)$$

n'est pas fini; il répond seulement aux conditions du théorème du § 9 (2) — à la condition (A)—car la variation totale de $q(\sigma, 1)$ ne surpassant pas

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{|\cos(r_{10} N_0)|}{r_{10}^2}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{h(x)}{r_{10}}\, d\sigma,$$

est bornée comme la fonction du point (y) sur (S_1); c'est une suite immédiate des considérations du § 2 (6) et de la remarque ci-dessus à propos de $m(\sigma, h, 1)$.

Comme on a, la surface (S) étant celle de Liapounoff,

$$(6) \qquad 2\pi q(x, y) = \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h(x)}{r_{10}} = \frac{C(0, 1)}{r_{10}^{2-\lambda}}, 0 < \lambda \leqq 1,$$

où $C(0, 1)$ est une fonction bornée des points (x) et (y), tous les noyaux itérés, à partir d'un d'entre eux, sont finis suivant les théorèmes des §§ 6 (6) et 7 (6), étant égaux aux moyennes des fonctions bornées des points (x) et (y); ces fonctions bornées sont les noyaux itérés, correspondant au noyau (6).

En effet, la démonstration des théorèmes des dits paragraphes est basée uniquement sur l'égalité (6) et sur le fait, suivant lequel l'intégrale

$$\int_{(S)} \left\{\frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h(x)}{r_{10}}\right\} d\sigma$$

est uniformément convergente comme fonction des points (y) sur (S_1).

Démontrons en premier lieu que $\lambda = -1$ n'est pas un nombre caractéristique de l'équation (4). Si l'équation

$$(7) \qquad \varphi(\sigma) = -\int_{(S_1)} q(\sigma, 1)\varphi(\sigma_1) d\sigma_1$$

a une solution, la fonction moyenne $\varphi(\sigma)$ satisfait aussi à l'équation

$$(7') \qquad \varphi(\sigma) = (-1)^n \int_{(S_1)} q_n(\sigma, 1)\varphi(\sigma_1) d\sigma_1,$$

$q_n(\sigma, 1)$ étant un des noyaux itérés pour le noyau $q(\sigma, 1)$.

Or, pour un certain n le noyau $q_n(\sigma, 1)$ est égal à la moyenne d'une fonction bornée des points (x) et (y):

$$q_n(\sigma, 1) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} q_n(0, 1) d\sigma.$$

Remarquons que la fonction $q_n(x, y)$ étant égale à

$$q_n(x, y) = \int_{(S_2)} q(x, 2)\, q_{n-1}(2, y)\, d\sigma_2 = h(x) \int_{(S_2)} \frac{q_{n-1}(2, y)}{r_{20}}\, d\sigma_2 + \ldots,$$

est discontinue dans les mêmes points que $h(x)$.

Si (η) est le domaine, contenant dans son intérieur tous les points de discontinuité de la fonction $h(x)$, on a, suivant le théorème du § 8 (2)

$$\int_{(S_1)} \left(\int_{(\sigma - \sigma\eta)} q_n(0, 1)\, d\sigma \right) \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1 = \int_{(\sigma - \sigma\eta)} \left(\int_{(S_1)} q_n(0, 1)\, \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right) d\sigma,$$

$(\sigma\eta)$ étant le lieu géométrique des points communs à (σ) et à (η).

Comme on peut choisir (η) de manière que les intégrales

$$\int_{(\sigma\eta)} \left(\int_{(S_1)} q_n(0, 1)\, \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right) d\sigma, \quad \int_{(\sigma\eta)} q_n(0, 1)\, d\sigma$$

soient en valeur absolue moindre qu'un nombre donné d'avance, on en conclut que

$$\varphi(\sigma) = (-1)^n \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \left(\int_{(S_1)} q_n(0, 1)\, \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right) d\sigma.$$

La fonction $q_n(0, 1)$ étant bornée comme la fonction du point (x), la fonction

$$\psi(x) = (-1)^n \int_{(S_1)} q_n(0, 1)\, \varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

l'est aussi et on a

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \psi(0)\, d\sigma.$$

La fonction $\varphi(\sigma)$ est donc la moyenne d'une fonction bornée sur (S).

Envisageons maintenant le potentiel

$$w(x) = \int_{(S_1)} \frac{\varphi(\sigma_1)\, d\sigma_1}{r_{10}} = \int_{(S_1)} \frac{\psi(y)\, d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Comme la fonction $\varphi(\sigma)$ vérifie l'équation (7), on a

$$\sigma^{(i)}(w) = -(hw)_\sigma.$$

En multipliant la dernière égalité par w et en l'intégrant sur (S), on obtient

$$-\int_{(S)} w(hw)_\sigma \, d\sigma = -\int_{(S)} hw^2 \, d\sigma = \int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w) \, d\sigma.$$

Or, il est aisé de démontrer que

$$\int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w) \, d\sigma = \int_{(\Omega_x)} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2 \right\} d\omega, \tag{8}$$

en désignant par (Ω_x) le domaine limité par (S) et par (ξ, η, ζ) les coordonnées du point (x). La dernière égalité prend alors la forme

$$-\int_{(S)} hw^2 \, d\sigma = \int_{(\Omega_x)} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2 \right\} d\omega.$$

La partie gauche de l'égalité étant négative et la partie droite positive, on en conclut que $w = 0$; la supposition, que w est une constante est en contradiction avec la condition (3).

Or, w étant égale à zéro, $\varphi(\sigma)$ l'est aussi, ce qui est contre l'hypothèse.

Il reste à démontrer l'identité (8).

Envisageons un domaine (Ω) tendant vers (Ω_x); soit (S') sa frontière.

La fonction $\psi(y)$ étant bornée, la fonction w est continue; supposons que l'oscillation de w dans chaque intervalle (h), ayant les arêtes égales à un nombre donné, soit moindre que ε. Décomposons (S) en n portions, en choisissant le nombre n de manière que chaque portion soit à l'intérieur d'un intervalle (h). Soient (σ_s), $s = 1, 2, \ldots n$, ces portions; supposons que les portions (σ_s'), $s = 1, 2, \ldots n$, de (S') tendent vers (σ_s). Supposons de plus que (S') est si près de (S), que chaque portion (σ_s') et sa correspondante (σ_s) peuvent être couvertes par un seul intervalle (h) et que

$$|\sigma^{(i)}_s(w)\,\sigma_s - \sigma_s'(w)\,\sigma_s'| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

En raisonnant comme dans le § 9 (2) nous obtenons

$$\int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w)\,d\sigma = \sum_{s=1}^{s=n} w(x_s)\,\sigma_s^{(i)}(w)\,\sigma_s + \theta\varepsilon\, S(w)\, S, \qquad |\theta| < 1,$$

où (x_s) est un point arbitraire sur (σ_s) et $S(w)\,S$ la variation totale de $\sigma^{(i)}(w)$.

En effet, pour certains points (x_s') et (x_s'') sur (σ_s) on a

$$\int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w)\,d\sigma = \sum_{s=1}^{s=n} \{w(x_s')\,\underline{\sigma}_s(w) - w(x_s'')\,\overline{\sigma}_s(w)\}\,\sigma_s,$$

$\underline{\sigma}_s(w)$ et $\overline{\sigma}_s(w)$ étant les parties positive et négative de $\sigma_s^{(i)}(w)$, et

$$|w(x_s') - w(x_s)| < \varepsilon, \qquad |w(x_s'') - w(x_s)| < \varepsilon.$$

On obtient de même, si $S'(w)\,S'$ est la variation totale de $\sigma'(w)$,

$$\int_{(S')} w\sigma'(w)\,d\sigma' = \sum_{s=1}^{s=n} w(x_s')\,\sigma_s'(w)\,\sigma_s' + \theta\varepsilon\, S'(w)\, S', \qquad |\theta| < 1.$$

La variation $S'(w)\,S'$ ne surpassant pas

$$\int_{(S_1)} |\psi(y)| \left(\int_{(S')} \frac{|\cos(r_{12}\, N_2')|}{r_{12}^2}\, d\sigma'\right) d\sigma_1,$$

où N'_2 est la normale à (S') au point (x) sur (S'), est bornée indépendamment de la position de (S'), l'intégrale intérieure jouissant de cette propriété. Nous démontrerons cette assertion, entre autres, dans le § 3.

Il suit de tout cela que

$$\left|\int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w)\,d\sigma - \int_{(S')} w\frac{dw}{dn}\,d\sigma'\right| < B\varepsilon,$$

B étant un nombre déterminé.

Ainsi

$$\int_{(S)} w\sigma^{(i)}(w)\,d\sigma = \lim \int_{(S')} w\frac{dw}{dn}\,d\sigma'.$$

Or

$$\int\limits_{(S')} w \frac{dw}{dn} d\sigma' = \int\limits_{(\Omega)} \Sigma \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\omega.$$

La partie droite de la dernière égalité a donc une limite, d'où suit que l'égalité (8) subsiste.

En supposant que n est assez grand, pour que $q_n(\sigma, y)$ soit fini, introduisons la résolvante

(9) $$\gamma_n(\sigma, y, \lambda) = \frac{D(\sigma, y, \lambda)}{D(\lambda)}$$

de l'équation itérée au noyau $q_n(\sigma, y)$.

Cette résolvante est la solution de l'équation

$$\gamma_n(\sigma, y, \lambda) = \lambda \int\limits_{(S_2)} q_n(\sigma, 2)\, \gamma_n(\sigma_2, y, \lambda)\, d\sigma_2 + q_n(\sigma, y),$$

à laquelle on peut, en utilisant comme ci-dessus le théorème du § 8 (2), donner la forme

$$\gamma_n(\sigma, y, \lambda) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \left\{ \lambda \int\limits_{(S_2)} q_n(x, z)\, \gamma_n(\sigma_2, y, \lambda)\, d\sigma_2 + q_n(x, y) \right\} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \gamma_n(x, y, \lambda)\, d\sigma,$$

ce qui montre que la fonction $\gamma_n(\sigma, y, \lambda)$ est la moyenne de la fonction $\gamma_n(x, y, \lambda)$, qui est bornée comme fonction des points (x) et (y) et qui satisfait à l'équation

$$\gamma_n(x, y, \lambda) = \lambda \int\limits_{(S_2)} q_n(x, z)\, \gamma_n(z, y, \lambda)\, d\sigma_2 + q_n(x, y).$$

En appliquant les formules du § 7 (3), nous obtenons la résolvante de l'équation (4)

(10) $$\begin{aligned} \gamma(\sigma, y, \lambda) &= \Sigma_n(\sigma, y, \lambda) + \lambda^n \int\limits_{(S_2)} \Sigma_n(\sigma, 2, \lambda)\, \gamma_n(\sigma_2, y, \lambda)\, d\sigma_2 = \\ &= \Sigma_n(\sigma, y, \lambda) + \lambda^n \int\limits_{(S_2)} \Sigma_n(\sigma, 2, \lambda)\, \gamma_n(z, y, \lambda)\, d\sigma_2 \end{aligned}$$

ou

$$\Sigma_n(\sigma, y, \lambda) = q(\sigma, y) + \lambda q_2(\sigma, y) + \ldots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(\sigma, y).$$

En substituant dans (10) à la place des $q_s(\sigma, y)$ leurs expressions par les noyaux itérés du noyau $q(x, y)$, on trouve

$$\Sigma_n(\sigma, y, \lambda) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \{q(x, y) + \lambda q_2(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} q_n(x, y)\} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \Sigma_n(x, y)\, d\sigma$$

et, comme, la fonction $\gamma_n(x, y, \lambda)$ étant bornée sur (S), l'intégrale

$$\int_{(S_2)} \Sigma_n(x, z, \lambda)\, \gamma_n(z, y, \lambda)\, d\sigma^2$$

est absolument et uniformément convergente sur (S) comme fonction de (x), on a, en appliquant le théorème du § 12 (2)

$$(10') \quad \gamma(\sigma, y, \lambda) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \left\{\Sigma_n(x, y, \lambda) + \lambda^n \int_{(S_2)} \Sigma_n(x, z, \lambda)\, \gamma_n(z, y, \lambda)\, d\sigma_2\right\} d\sigma,$$

ce qui montre que la résolvante de l'équation (4) est égale à la moyenne de la résolvante de l'équation correspondante au noyau $q(x, y)$.

Comme $\lambda = -1$ n'est pas un nombre caractéristique du noyau $q(\sigma, y)$, la solution cherchée de l'équation (4) est donnée par la fonction

$$(11) \qquad \mu(\sigma) = u(\sigma) - \int_{(S_2)} u(\sigma_2)\, \gamma(\sigma, 2, -1)\, d\sigma_2$$

et la solution du problème par le potentiel

$$(12) \qquad v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S_1)} \left\{ u(\sigma_1) - \int_{(S_2)} u(\sigma_2)\, \gamma(\sigma_1, z, -1)\, d\sigma_2 \right\} \frac{d\sigma_1}{r_{10}} \cdot$$

La valeur (10′) de $\gamma(\sigma, y, \lambda)$ montre immédiatement que la fonction $\gamma(\sigma, y, -1)$ répond à la condition (A), (y) étant un point sur (S_1).

On conclut de là, que le point (x) étant dans l'intérieur du domaine (Ω), limité par (S):

$$\int\limits_{(S_1)}\Big(\int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\,\gamma(\sigma_1, z, -1)\,d\sigma_2\Big)\frac{d\sigma_1}{r_{10}} = \int\limits_{(S_2)} u(\sigma_2)\Big(\int\limits_{(S_1)}\gamma(\sigma_1, z, -1)\frac{d\sigma_1}{r_{10}}\Big)d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\Big(\int\limits_{(S_2)}\gamma(\sigma_2, y, -1)\frac{d\sigma_2}{r_{20}}\Big)d\sigma_1$$

et que

(12′)
$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\,H(x, y)\,d\sigma_1$$

où, suivant le théorème du § 7 (2)

(13)
$$H(x, y) = \frac{1}{r_{10}} - \int\limits_{(S_2)}\gamma(\sigma_2, y, -1)\frac{d\sigma_2}{r_{20}} = \frac{1}{r_{10}} - \int\limits_{(S_2)}\gamma(z, y, -1)\frac{d\sigma_2}{r_{20}},$$

la fonction $\frac{1}{r_{20}}$ étant bornée, quand le point (x) est dans (Ω).

2. Étudions de plus près la solution (12). La fonction $\gamma(x, y, \lambda)$ étant la résolvante de l'équation intégrale au noyau $q(x, y)$, nous avons

$$\gamma(z, y, -1) = -\int\limits_{(S_3)} q(3, 1)\,\gamma(2, 3, -1)\,d\sigma_3 + q(2, 1) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)}\left\{\frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} + \frac{h(3)}{r_{13}}\right\}\gamma(2, 3, -1)\,d\sigma_3 + q(2, 1)$$

où, comme ailleurs, nous mettons (1), (2), ... à la place de (y), (z), ...

Or, le point (y) étant sur (S):

$$\int\limits_{(S_3)}\frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2}\gamma(2, 3, -1)\,d\sigma_3 = -\int\limits_{(S_3)}\frac{\cos(r_{31}N_3)}{r_{31}^2}\gamma(2, 3, -1)\,d\sigma_3 =$$

$$= -\Big(\int\limits_{(S_3)}\frac{\cos(r_{31}N_3)}{r_{31}^2}\gamma(2, 3, -1)\,d\sigma_3\Big)_i + 2\pi\gamma(2, 1, -1)$$

d'où il suit que

$$\gamma(2,\ 1,\ -1) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_{(S_3)}\left(\frac{\cos(r_{13} N_3)}{r_{31}^2} + \frac{h(3)}{r_{13}}\right)\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)_i + \frac{1}{2}q(2,\ 1).$$

et que

$$H(x,\ y) = \frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)}\left\{\frac{\cos(r_{12} N_2)}{r_{12}^2} + \frac{h(2)}{r_{12}}\right\}\frac{d\sigma_2}{r_{20}} +$$

(13′)

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)}\left(\int_{(S_3)}\left(\frac{\cos(r_{13} N_3)}{r_{13}^2} + \frac{h(3)}{r_{13}}\right)\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)_i \frac{d\sigma_2}{r_{20}};$$

Or

$$\int_{(S_2)}\frac{\cos(r_{12} N_2)}{r_{12}^2}\frac{d\sigma_2}{r_{20}} = -\int_{(S_2)}\frac{\cos(r_{21} N_2)}{r_{21}^2}\frac{d\sigma_2}{r_{20}} = -\left(\int_{(S_2)}\frac{\cos(r_{21} N_2)}{r_{21}^2}\frac{d\sigma_2}{r_{20}}\right)_i + 2\pi\frac{1}{r_{10}},$$

et, si le point (y) est dans l'intérieur de (Ω):

$$\int_{(S_2)}\left(\int_{(S_3)}\left(\frac{\cos(r_{13} N_3)}{r_{31}^2} + \frac{h(3)}{r_{31}}\right)\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)\frac{d\sigma_2}{r_{20}} =$$

$$= \int_{(S_3)}\left(\frac{\cos(r_{13} N_3)}{r_{31}^2} + \frac{h(3)}{r_{31}}\right)\left(\int_{(S_2)}\frac{\gamma(2,\ 3,\ -1)}{r_{20}}\,d\sigma_2\right)d\sigma_3 =$$

$$= \int_{(S_2)}\left(\frac{\cos(r_{12} N_2)}{r_{21}^2} + \frac{h(2)}{r_{21}}\right)\left(\int_{(S_3)}\frac{\gamma(3,\ 2,\ -1)}{r_{30}}\,d\sigma_3\right)d\sigma_2.$$

On peut donner, effectivement, à la partie gauche de l'égalité la forme

$$2\pi\int_{(S_2)}\left(\int_{(S_3)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)\frac{d\sigma_2}{r_{20}} =$$

$$= 2\pi\int_{(S_2)}\left(\frac{1}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)}\left(\int_{(S_3)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)d\sigma_2\right)\frac{d\sigma_2}{r_{20}} =$$

$$= 2\pi\int_{(S_2)}\left(\int_{(S_3)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(\sigma_2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\right)\frac{d\sigma_2}{r_{20}}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème du § 9 (2); l'égalité

$$\int\limits_{(\sigma_2)}\Big(\int\limits_{(S_3)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\Big)\,d\sigma_2 = \int\limits_{(S_3)}\Big(\int\limits_{(\sigma_2)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_2\Big)\,d\sigma_3$$

subsiste, car on a

$$\int\limits_{(\sigma_2-\sigma_{2}\eta)}\Big(\int\limits_{(S_3)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_3\Big)\,d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_{(S_3)}\Big(\int\limits_{(\sigma_2-\sigma_{2}\eta)} q(\sigma_3,\ 1)\,\gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_2\Big)\,d\sigma_3$$

et

$$\int\limits_{(\sigma_{2}\eta)} \gamma(2,\ 3,\ -1)\,d\sigma_2$$

est infiniment petite avec η.

Il suit de là définitivement que

$$H(1,\ 0) = \frac{1}{2r_{10}} - \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{(S_2)} q(2,\ 1)\Big\{\frac{1}{r_{20}} - \int\limits_{(S_3)} \frac{\gamma(3,\ 2,\ -1)}{r_{30}}\,d\sigma_3\Big\}\,d\sigma_2\Big)_i$$

et

(14) $$v(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)} u(\sigma_1)\,G(1,\ 0)\,d\sigma_1,$$

où

$$G(1,\ 0) = \frac{1}{r_{10}} - \int\limits_{(S_2)} q(2,\ 1)\Big\{\frac{1}{r_{20}} - \int\limits_{(S_3)} \frac{\gamma(3,\ 2,\ -1)}{r_{30}}\,d\sigma_3\Big\}\,d\sigma_2.$$

La comparaison de

$$\int\limits_{(S_2)} q(2,\ 1)\Big\{\frac{1}{r_{20}} - \int\limits_{(S_3)} \frac{\gamma(3,\ 2,\ -1)}{r_{30}}\,d\sigma_3\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\Big\{\frac{\cos(r_{12}\,N_2)}{r_{21}^2} + \frac{h(2)}{r_{21}}\Big\}\Big\{\frac{1}{r_{20}} - \int\limits_{(S_3)} \frac{\gamma(3,\ 2,\ -1)}{r_{30}}\,d\sigma_3\Big\}\,d\sigma_2$$

avec la formule (12') montre que

$$\Gamma(1, 0) = \int\limits_{(S_2)} q(2, 1) \left\{ \frac{1}{r_{20}} - \int\limits_{(S_3)} \frac{\gamma(3, 2, -1)}{r_{30}} d\sigma_3 \right\} d\sigma_2$$

est une fonction qui résout le problème, posé dans le § 1, si on y suppose que $u(\sigma)$ soit la moyenne de la fonction

$$\frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h(x)}{r_{10}},$$

traitée comme la fonction du point (x).

Nous nommerons $G(1, 0)$ la fonction de Green pour le problème de la température stationnaire et la formule (14) est en complète analogie avec les formules des §§ 14 (6) et 15 (7).

Si la fonction $u(\sigma)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ sommable sur (S), la formule (14), le point (x) étant dans l'intérieur de (Ω), prend, suivant le théorème du § 7 (2), la forme

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S_1)} f(y) G(y, x) d\sigma. \tag{14'}$$

Nous avons supposé dans le § 1 que la fonction $\mu(\sigma)$ est continue. Si la fonction $u(\sigma)$ est continue, on s'assure aisément que cela a lieu. Pour le démontrer il suffit seulement de s'assurer, que la fonction $\mu(\sigma)$ est continue dans le voisinage du contour de (σ), si la fonction $u(\sigma)$ vérifie cette condition; or, cela est presque évident, la fonction $\gamma(\sigma, y, \lambda)$ étant absolument continue; la continuité de $\mu(\sigma)$ dans le voisinage du contour de (σ) dépend donc exclusivement de celle de $u(\sigma)$.

Si $u(\sigma)$ n'est pas continue dans le voisinage du contour de (σ), la fonction trouvée par nous donne la solution du problème, dans lequel $\sigma^{(i)}(v)$ est le flux relatif de v.

La solution du problème posé par nous est unique, car la différence $w = v - v_1$ de deux potentiels de simple couche, qui résolvent le problème, est un potentiel de simple couche, qui répond sur la frontière à la condition

$$\sigma^{(i)}(w) = -(hw)_\sigma$$

et est égal à zéro suivant les raisonnements du § 1.

3. Avant d'aller plus loin faisons quelques remarques à propos de la fonction de Green, introduite dans le paragraphe précédent et à propos des fonctions de Green du problème de Dirichlet et du problème de Neumann. construites dans les chapitres 6 et 7.

Démontrons, en premier lieu, que ces trois fonctions sont les fonctions à carré intégrable par rapport à un de leurs arguments et que leurs intégrales sont bornées comme fonctions de l'autre.

Pour le démontrer, il suffit d'observer que chacune des ces trois fonctions est égale à une somme de $\frac{1}{r_{10}}$ et d'une fonction harmonique $\Gamma(1, 0)$, qui est un potentiel de simple couche comme fonction de l'une des variables, ayant la densité égale à la fonction de l'autre.

La fonction $\frac{1}{r_{10}}$ étant à carré intégrable, il suffit de démontrer que la variation totale de la densité du potentiel, qui est égal à $\Gamma(1, 0)$, est bornée pour chaque position du point, dont elle dépend, car le potentiel de simple couche est transformable suivant les règles indiquées dans le § 4 (5) dans un potentiel newtonien, ayant la densité possédant la même variation totale.

Commençons par la fonction de Green du problème de Dirichlet.

Suivant les formules du § 15 (7), nous avons

$$\Gamma(1, 0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)} \frac{1}{r_{21}} H(2, 0)\, d\sigma_2 \tag{15}$$

où

$$H(2, 0) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} - \left(\int\limits_{(S_3)} \frac{l_1(\sigma_3, 2)\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2}\, d\sigma_3 - \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_{(S_3)} \frac{l_2(\sigma_3, 2)\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2}\, d\sigma_3 - \int\limits_{(S_3)} \frac{l_1(\sigma_3, 2)\cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2}\, d\sigma_3\right) - \ldots\right.$$

ou diffère, dans le cas (I), de cette fonction par un potentiel de simple couche; on a ici

$$l_1(\sigma_3, 2) = -\frac{1}{2\pi\, \sigma_3}\int\limits_{(\sigma_3)} \frac{\cos(r_{32} N_3)}{r_{32}^2}\, d\sigma_3, \quad l_k(\sigma_3, 2) = \int\limits_{(S_4)} l_{k-1}(\sigma_3, 4)\, l_1(\sigma_4, 2)\, d\sigma_4.$$

La densité du potentiel additionnel de simple couche dans le cas (I) est une fonction linéaire des expressions

$$\alpha_\lambda = \int\limits_{(S_2)} \frac{1}{r_{20}} \psi^{(\lambda)} d\sigma_2,$$

les fonctions $\psi^{(\lambda)}$ étant continues sur (S_2), et est évidemment une fonction continue du point (x).

Si le point (x) est dans l'intérieur de (Ω_x), la fonction $H(2, 0)$ est continue et on peut, en utilisant les théorèmes du § 11 (2), remplacer l'expression (15) par

$$\text{(15')} \qquad \Gamma(1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S_2)} \frac{1}{r_{21}} H(\sigma_2, 0) d\sigma_2,$$

en désignant par $H(\sigma_2, 0)$ la somme de la série

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{2\sigma_2} \left\{ \int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} d\sigma_2 - \left(\int\limits_{(\tau_2)} \left(\int\limits_{(S_3)} \frac{l_1(\sigma_3, 2) \cos(r_{30} N_3)}{r_{30}^2} d\sigma_3 \right) d\sigma_2 - \right.\right.$$
$$\left. - \int\limits_{(\tau_2)} \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^2} d\sigma_2 \right) + \dots$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale

$$\int\limits_{(S_3)} \frac{f(x_3) |\cos r_{30} N_3)|}{r_{30}^2} d\sigma_2,$$

dans laquelle $f(x_3)$ est une fonction bornée des points (x_3) sur (S_3), est bornée indépendamment de la position du point (x) dans (Ω_x).

Soit (x_5) le point sur (S_3) qui est le plus près du point (x); soit δ la distance entre (x) et (x_5).

Construisons la sphère de Liapounoff, ayant le point (x_5) pour centre et une sphère du rayon 2δ. Désignons par (Σ) et (σ) les portions de (S_3) découpées par ces sphères. L'intégrale prise sur $(S_3 - \Sigma)$ est bornée et ne surpasse pas un nombre de la forme aA, A étant la borne de $|f(x_3)|$; l'intégrale, prise sur (σ) ne surpasse pas

$$a_1 A \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{(\sigma)} \rho d\rho = .2 a_1 A;$$

comme on a

$$r_{30}\cos(r_{30}N_3) = r_{35}\cos(r_{35}N_3) + \delta\cos(\delta N_3),$$

l'intégrale, prise sur $(\Sigma - \sigma)$, est égale à la somme de deux intégrales.

Dans l'une d'entre elle

$$|\cos(r_{35}N_3)| < E r_{35}^{1-\lambda}$$

et elle est bornée par un nombre de la forme lA; l'autre est plus petite que

$$bA\delta\int_{\delta}^{d}\frac{\rho d\rho}{\rho^3} = bA\left\{1 - \frac{\delta}{d}\right\}.$$

Suivant les considérations des §§ 15 (7) et 11 (7) on obtient le terme complémentaire de $H(2, 0)$ en multipliant le terme complémentaire d'une série, uniformément convergente sur (S_3), par

$$\frac{\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}$$

et en intégrant; le terme complémentaire de $H(2, 0)$ est donc pour n assez grand moindre qu'un nombre ε indépendamment de la position du point (x) dans (Ω_x); le terme complémentaire de la série (16) est donc moindre que ε indépendamment du choix de (σ_2) et sa variation totale est bornée pour chaque choix du point (x). On en conclut que la variation totale de la série (16) reste bornée, si les variations totales de ses termes en nombre fini restent bornées. Or, cela a effectivement lieu, les variations totales des termes ne surpassant pas

$$\int_{(S_3)}\frac{|\cos(r_{30}N_3)|}{r_{30}^2}\,d\sigma_3,\quad \int_{(S_3)}\frac{K_n(S_2, 3)\,|\cos(r_{30}N_3)|}{r_{30}^2}\,d\sigma_3$$

car, suivant le § 5 (7)

$$\frac{1}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)}\left(\int_{(S_2)}\frac{l_n(\sigma_3, 2)\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}\,d\sigma_3\right)d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2}\int_{(\sigma_2)}\left(\int_{(S_3)}\frac{l_n(3, 2)\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}\,d\sigma_3\right)d\sigma_2 = \int_{(S_3)}\frac{k_n(\sigma_2, 3)\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}\,d\sigma_3.$$

On démontre de même le théorème pour la fonction de Green du problème de Neumann, la densité du potentiel de simple couche étant cette fois égale à

$$\frac{1}{2\sigma_2}\left\{\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\,d\sigma_2+\left(\int\limits_{(S_3)}k_1(\sigma_2,\,3)\frac{\cos(r_{30}N_3)}{r_{30}^2}\,d\sigma_3+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2}\,d\sigma_2\right)+\ldots$$

En passant à la fonction de Green du problème de la température stationnaire, nous avons suivant les §§ 1 et 2 que

$$\Gamma(1,\,0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\frac{\mu(\sigma_2)}{r_{20}}\,d\sigma_2,$$

où $\mu(\sigma)$ est la solution de l'équation (4) pour

$$u(\sigma)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma+\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{h(x)}{r_{10}}\,d\sigma=2\pi q(\sigma,\,1).$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{2\pi}\mu(\sigma_2)=q(\sigma_2,\,1)-\int\limits_{(S_3)}q(\sigma_3,\,1)\gamma(\sigma_2,\,3,\,-1)\,d\sigma_3,$$

et que la variation totale de $\mu(\sigma_2)$ ne surpasse pas

$$(17)\qquad Q(S_2,\,1)S_2+\int\limits_{(S_3)}Q(\sigma_3,\,1)\bar{\gamma}(\sigma_2,\,3,\,-1)S_2\,d\sigma_3,$$

où

$$2\pi\,Q(\sigma_3,\,1)=\frac{1}{\sigma_3}\int\limits_{(\sigma_3)}\frac{|\cos(r_{13}N_3)|}{r_{13}^2}\,d\sigma_3+\frac{1}{\sigma_3}\int\limits_{(\sigma_3)}\frac{h(x_3)}{r_{13}}\,d\sigma_3$$

et $\bar{\gamma}(S_2,\,3,\,-1)S_2$ est la variation totale de $\gamma(\sigma_2,\,3,\,-1)$.

Or, suivant la formule (10′), la variation totale $\bar{\gamma}(S_2, 3, -1)S_2$ est bornée sur (S_3) comme fonction du point (3) sur (S_3) et l'intégrale dans (17) étant égale à

$$\int\limits_{(S_3)} \left\{ \frac{|\cos(r_{13} N_3)}{r_{13}^2} + \frac{h(x_3)}{r_{13}} \right\} \bar{\gamma}(S_2, 3, -1) S_2 \, d\sigma_3,$$

est bornée comme fonction du point (y) suivant les remarques faites ci-dessus, ainsi que l'intégrale

$$Q(S_2, 1) S_2 = \int\limits_{(S_2)} \frac{\cos(r_{12} N_2)|}{r_{12}^2} \, d\sigma_2$$

ce qu'il fallait démontrer.

Désignons par $L(x)$ une fonction intégrable dans le sens de Riemann dans (Ω_x), ayant toutes ses valeurs non négatives, et telle que pour chaque sphère (ω_0) du rayon ρ le produit $L(\omega_0)\rho^{1-\lambda}$, $0 < \lambda \leqq 1$ reste borné. Sous cette supposition, l'intégrale

$$\int\limits_{(\tau)} \frac{L(y)}{r_{10}} \, d\tau = \int\limits_{(\tau)} \frac{L(\tau)}{r_{10}} \, d\tau$$

est une fonction continue du point (x) et on s'assure sans peine que le produit $L(y) G(y, x)$ est intégrable par rapport à y: suivant le § 2 (8) on a

$$\int\limits_{(\tau)} L(y) G(y, x) \, d\tau = \int\limits_{(\tau)} \frac{L(y)}{r_{10}} \, d\tau + \int\limits_{(S_2)} \left(\int\limits_{(\tau)} \frac{L(y)}{r_{21}} \, d\tau \right) H(\sigma_2, 0) \, d\sigma_2,$$

la dernière intégrale ayant un sens, le premier facteur sous le signe d'intégrale étant une fonction continue.

Envisageons maintenant en second lieu les moyennes

$$(18) \qquad G(\tau, 0) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} G(1, 0) \, d\tau, \qquad k(\tau, 0) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y) G(1, 0) \, d\tau.$$

Ces moyennes sont égales aux sommes des intégrales

$$(19) \qquad \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} \frac{d\tau}{r_{10}}, \quad \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} \frac{L(y) \, d\tau}{r_{10}}$$

avec les fonctions

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\Gamma(1,\ 0)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)} m(\tau,\ 2)\,H(\sigma_2,\ 0)\,d\sigma_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)} m(\tau,\ 2)\,H(2,\ 0)\,d\sigma_2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\frac{L}{r_{12}}\,d\tau\right)H(\sigma_2,\ 0)\,d\sigma_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\frac{L}{r_{12}}\,d\tau\right)H(2,\ 0)\,d\sigma_2.$$

Ces dernières fonctions sont égales aux sommes des séries uniformément convergentes dans (Ω_x), dont les termes, les fonctions (19) étant continues comme les fonctions de (x), sont continus comme les fonctions de (x). Les moyennes (18) sont donc les fonctions continues du point (x) dans (Ω_x) et absolument continues comme les fonctions de (τ). La variation totale de $H(\sigma_2,\ 0)$ étant bornée comme une fonction de (x), il est de même avec la variation totale de $k(\tau, 0)$; la fonction $k(\tau, x)$ répond, donc, aux conditions du théorème du § 9 (2).

Remarque. Nos assertions subsistent même si la fonction $L(y)$, intégrable en sens de Riemann, est telle, que pour chaque sphère (ω_0) du rayon ρ le produit $L(\omega_0)\rho^{2-\lambda}$ reste borné; la seconde des intégrales (19) reste une fonction continue de (x) même dans ce cas.

4. Soit (S) une surface de Liapounoff qui limite un domaine (Ω_x).

Désignons, comme dans le paragrpahe précédant, par $L(x)$ une fonction intégrable dans (Ω_x) dans le sens de Riemann, ayant toutes ses valeurs non négatives, et telle que pour chaque sphère (ω_0) du rayon ρ, $L(\omega_0)\rho^{1-\lambda}$ soit bornée.

En désignant par $u(x)$ une fonction sommable, convenons de désigner par

$$\omega(Lu)$$

la moyenne du produit Lu pour le domaine (ω), (ce qui suppose que la fonction Lu est sommable), l'indication de la moyenne de $v(x)$ pour le domainė (ω) par le signe $v(\omega)$, employée jusqu'à présent, devenant incommode, quand il s'agit du produit de deux fonctions.

Supposons, de plus, que l'ensemble des racines de l'équation

$$L(x) = 0$$

est de mesure nulle.

Posons le problème (A_1): construire une fonction sommable $u(x)$ qui répond aux conditions

$$\Delta u(\omega) = \omega(Lu) + \theta(\omega) \tag{20}$$

pour chaque domaine (ω) contenu dans (Ω) et

$$u^{(i)}(\sigma) = \mu(\sigma) \tag{21_α}$$

pour chaque portion (σ) de la frontière (S); nous désignons ici par $\theta(\omega)$ une fonction moyenne additive, à variation bornée et continue des domaines (ω) et par $\mu(\sigma)$ une fonction additive, à variation bornée et continue des portions (σ) de (S).

Suivant les théorèmes du chapitre 7, nous pouvons construire un potentiel de double couche $w(x)$, répandu sur (S) et tel que

$$w^{(i)}(\sigma) = \mu(\sigma). \tag{22}$$

Remarque. Si $\mu(\sigma)$ n'est pas continue sur (S), on peut construire le potentiel de double couche de manière que la condition (22) soit satisfaite, en y comprenant sous $w^{(i)}(\sigma)$ la valeur moyenne relative du potentiel de double couche $w(x)$.

Ayant posé

$$u(x) = v(x) + w(x),$$

nous transformons l'équation (20) en

$$\Delta v(\omega) = \omega(Lv) + \vartheta(\omega), \tag{20_1}$$

où

$$\vartheta(\omega) = \theta(\omega) + \omega(Lw)$$

et

$$v^{(i)}(\sigma) = 0. \tag{21_1}$$

La fonction moyenne $\omega(Lw)$ étant absolument continue, la fonction $\vartheta(\omega)$ est continue.

Pour résoudre ce nouveau problème (B_1), remarquons en premier lieu, que la fonction sommable $v(x)$ satisfaisant à l'équation (20_1), on a, en négligeant par le terme additionnel, qui est égal à zéro presque partout,

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\frac{d\tau}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} + H(x), \tag{22}$$

où $H(x)$ est une fonction harmonique; les fonctions $\tau(Lv)$ et $\vartheta(\tau)$ étant continues, chacun des potentiels newtoniens dans la partie droite de l'égalité (22) possède un laplacien pour chaque domaine.

Si la fonction $v(x)$ satisfait à l'équation (22), la fonction

$$v_1(x) = v(x) + \alpha(x),$$

où $\alpha(x)$ est égale à zéro presque partout, satisfait à l'équation

$$v_1(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv_1)\frac{d\tau}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}} + H(x) + \alpha(x),$$

car on a

$$\omega(Lv) = \omega(Lv_1).$$

Les intégrales dans (22) étant généralement divergentes, il est plus commode, pour donner aux formules un sens précis, d'envisager à la place de $v(x)$ sa moyenne et de remplacer (22) par

$$(23) \qquad v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\, m(\omega,\ 1)\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\, m(\omega,\ 1)\, d\tau + H(\omega),$$

en appliquant les formules du § 2 (8).

Si l'on s'occupe de la valeur moyenne de $v(x)$, le terme $\alpha(x)$, negligé par nous, n'a aucune influence sur cette valeur.

Remarque. Si la fonction $\theta(\omega)$ n'était pas continue, l'égalité (20_1) serait satisfaite par la fonction $v(x)$ seulement dans un corps (A), formé par les domaines, limités par les surfaces, dans le voisinage desquelles la fonction $\theta(\omega)$ est continue.

On peut disposer de la fonction harmonique $H(x)$ pour satisfaire à la condition (21_1).

Les fonctions moyennes $\tau(Lv)$ et $\vartheta(\tau)$ étant continues dans le voisinage de (S_1), on trouve

$$H^{(i)}(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\, m(\sigma,\ 1)\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\, m(\sigma,\ 1)\, d\tau,$$

d'où l'on conclut, en utilisant le théorème du § 15 (7):

$$(24)\quad \begin{aligned} H(x) = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\,m(\sigma_2,\,1)\,d\tau\right)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2 - \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,m(\sigma_2,\,1)\,d\tau\right)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2, \end{aligned}$$

où $G(1,\,0)$ est la fonction de Green du probléme de Dirichlet, attachée à la surface (S_1).

Si le point (x) est dans l'intérieur de (S_2), la fonction $\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}$ est continue comme fonction des points sur (S_2); on peut, donc, utiliser le théorème du § 9 (2), en écrivant

$$(24')\quad \begin{aligned} H(x) = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}m(\sigma_2,\,1)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2\right)d\tau - \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}m(\sigma_2,\,1)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2\right)d\tau; \end{aligned}$$

or, la fonction

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}m(\sigma_2,\,1)\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\frac{1}{r_{21}}\frac{dG(2,\,0)}{dn_2}\,d\sigma_2$$

est égale, suivant le théorème du paragraphe 15 (7), à la fonction harmonique $\Gamma(0,\,1)$ dont la valeur sur (S_2) est égale à $\frac{1}{r_{12}}$, le point (y) étant un paramètre.

La formule (24′) prend donc la forme

$$H(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\,\Gamma(0,\,1)\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,\Gamma(0,\,1)\,d\tau$$

et la substitution dans (23) donne

$$(25)\quad v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\,G(1,\,\omega)\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,G(1,\,\omega)\,d\tau,$$

où nous désignons par $G(1, \omega)$ la différence des moyennes $m(\omega, 1)$ et $\Gamma(\omega, 1)$, qui est égale à la moyenne de la différence

$$\frac{1}{r_{10}} - \Gamma(0, 1) = G(1, 0).$$

La moyenne $G(1, \omega)$ étant une fonction continue du point (y), le produit $L(y)\, G(1, \omega)$ est intégrable en sens de Riemann; on peut donner à (25) la forme

$$(25_1) \quad v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} L(y)\, G(1, \omega)\, v(\tau)\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\, G(1, \omega)\, d\tau,$$

qui montre que la moyenne $v(\omega)$ est la solution d'une équation intégrale.

5. Posons maintenant le problème (A_2): construire une fonction sommable $u(x)$, qui répond aux conditions:

$$(20) \qquad \Delta u(\omega) = \omega(Lu) + 0(\omega)$$

pour chaque domaine (ω) contenu dans (Ω_x) et:

$$(21_\beta) \qquad \sigma^{(i)}(u) = \mu(\sigma)$$

pour chaque portion (σ) de la frontière (S), L, $\theta(\omega)$ et $\mu(\sigma)$ ayant le même sens que dans le § 4.

Si l'on a

$$(26) \qquad \mu(S) = 0,$$

on peut, en appliquant littéralement les raisonnements du § 4, substituer au problème (A_2) le problème (B_2) de la construction de la fonction $v(x)$, qui répond aux conditions

$$(20_1) \qquad \Delta v(\omega) = \omega(Lv) + \vartheta(\omega)$$

et

$$(21_2) \qquad \sigma^{(i)}(v) = 0,$$

où $\vartheta(\omega)$ est une fonction continue; il faut poser $u = v + w$, en choisissant pour $w(x)$ la fonction harmonique qui résout le problème de Neumann sous la condition

$$\sigma^{(i)}(w) = \mu(\sigma).$$

Mais, si la condition (26) n'est pas satisfaite, il faut changer les raisonnements, la fonction $w(x)$ n'existant pas. Posons dans ce cas

$$K = \mu(S) S$$

et introduisons la fonction

$$u_1(x) = \frac{K}{4\pi\Omega_x} \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{d\tau}{r_{10}}.$$

Nous avons

$$\frac{du_1}{dn} = \frac{K}{4\pi\Omega_x} \frac{d}{dn} \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{d\tau}{r_{10}},$$

d'où il suit

$$\int\limits_{(S)} \frac{du_1}{dn} d\sigma = \frac{K}{4\pi\Omega_x} \int\limits_{(S)} \left(\frac{d}{dn} \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{d\tau}{r_{10}} \right) d\sigma = \frac{K}{4\pi\Omega_x} \int\limits_{(\Omega_x)} \left(\Delta \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{d\tau}{r_{10}} \right) d\omega =$$

$$= - \frac{K}{4\pi\Omega_x} 4\pi \int\limits_{(\Omega_x)} d\omega = - K.$$

On a donc

$$S(u_1) S = \int\limits_{(S)} \frac{du_1}{dn} d\sigma = - \mu(S) S.$$

Cherchons maintenant une fonction $u_2(x)$ harmonique dans l'intérieur de (Ω_x) afin d'avoir sur (S)

$$\sigma^{(i)}(u_2) = \mu(\sigma) + \sigma(u_1).$$

La solution du problème est possible, car on a

$$\mu(S) + S(u_1) = 0.$$

Posons $w = u_2 - u_1$ et $u = v + w$. Dans l'intérieur de $(\Omega_x) v$ satisfait à l'équation (20_1), dans laquelle on a

$$\vartheta(\omega) = \theta(\omega) + \omega(Lw) - K \colon \Omega_k$$

et sur la surface (S) à la condition (21_2).

L'équation (20_1) est satisfaite par la fonction qui vérifie la condition (22); on peut ajouter à cette fonction une fonction arbitraire $\alpha(x)$, qui est égale presque partout à zéro; la valeur moyenne de la fonction $v(x)$ satisfait à l'équation (23).

Pour satisfaire à l'équation (21_2) il faut choisir la fonction harmonique $H(x)$ de manière, qu'on ait sur la frontière

$$(27) \qquad \sigma^{(i)}(H) = \frac{1}{4\pi}\sigma^{(i)}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\frac{1}{r_{10}}\,d\tau\Big) + \frac{1}{4\pi}\sigma^{(i)}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}\Big);$$

les fonctions $\tau(Lv)$ et $\vartheta(\tau)$ étant continues dans (Ω_y), on s'assure aisément, que le flux des potentiels de la partie droite de (27) est égal à

$$(28) \quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma\Big)d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\Big(\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,\sigma\Big)\,d\tau.$$

En effet, soit (σ') une portion de la surface de la classe (C), qui tend vers (σ). Les fonctions $\tau(Lv)$ et $\vartheta(\tau)$ étant continues dans le voisinage de (σ'), le flux de la somme des intégrales est égal, suivant les formules du paragraphe 7 (8), à

$$(28') \quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\Big(\frac{1}{\sigma'}\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma'\Big)d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\Big(\frac{1}{\sigma'}\int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma'\Big)\,d\tau.$$

Soit (ω) un domaine tendant vers (Ω_y) et supposons que pour les domaines $(\omega_1) = (\Omega - \omega)$ on a

$$|\omega_1(Lv)|\,\omega_1 < \varepsilon\sigma, \qquad |\vartheta(\omega_1)|\,\omega_1 < \varepsilon\sigma.$$

En décomposant les intégrales étendues sur (Ω_y) en deux parties, dont l'une est évaluée pour (ω_1) et l'autre pour (ω), on voit que, les intégrales

$$(29) \qquad \int\limits_{(\sigma)}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma, \qquad \int\limits_{(\sigma')}\frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}\,d\sigma'$$

étant bornées et ne surpassant pas 4π en valeur absolue, la différence entre les portions des intégrales (28) et (28'), qui sont évaluées pour (ω_1), ne

surpasse pas 2ε en valeur absolue et que pour les points du domaine $(\underline{\omega})$ la seconde des variables (29) tend uniformément vers la première.

Suivant le théorème du § 14 (6) on a

$$H(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}d\sigma_2\right)d\tau\right\}G(2,\,0)\,d\sigma_2+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}d\sigma_2\right)d\tau\right\}G(2,\,0)\,d\sigma_2,$$

où $G(1,\,0)$ est la fonction de Green du problème intérieur de Neumann, c'est-à-dire la fonction de F. Neumann.

Si le point (x) est dans l'intérieur de (Ω_x), la fonction $G(2,\,0)$ reste continue, le point (2) étant sur (S). On peut donc utiliser le théorème du § 9 (2), ce qui donne

$$H(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}d\sigma_2\right)G(2,\,0)\,d\sigma_2\right\}d\tau+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}d\sigma_2\right)G(2,\,0)\,d\sigma_2\right\}d\tau=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}G(2,\,0)\,d\sigma_2\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}G(2,\,0)\,d\sigma_2\right)d\tau.$$

Or la fonction

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_1)}\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}G(2,\,0)\,d\sigma_2$$

résout le problème de Neumann, quand on cherche la fonction harmonique, qui prend sur (S) les valeurs égales à

$$-\frac{d\frac{1}{r_{10}}}{dn},$$

le point (y) étant un paramètre. On obtient donc pour $H(x)$ la valeur

$$(25) \qquad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\,\Gamma(1,\,0)\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\,\Gamma(1,\,0)\,d\tau,$$

si

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^{2}}\,G(2,\,0)\,d\sigma_2 = \Gamma(1,\,0).$$

Pour $v(\omega)$ on obtient la valeur

$$v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\,G(1,\,\omega)\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\,G(1,\,\omega)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,v(\tau)\,G(1,\,\omega)\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\,G(1,\,\omega)\,d\tau,$$

où nous désignons par $G(1,\,\omega)$ la valeur moyenne de

$$G(1,\,0) = \frac{1}{r_{10}} + \Gamma(1,\,0),$$

qui est la fonction de F. Neumann, attachée à la surface (S) dans le cas du problème intérieur.

6. Occupons-nous, en dernier lieu, du problème (A_3): construire une fonction sommable $u(x)$ qui répond aux conditions:

$$(20) \qquad \Delta u(\omega) = \omega(Lu) + \theta(\omega)$$

pour chaque domaine (ω) contenu dans (Ω) et:

$$(21_\gamma) \qquad \sigma^{(i)}(u) = -\big(h(x)\,u\big)_\sigma + \mu(\sigma)$$

pour chaque portion (σ) de la frontière (S), $h(x)$ étant une fonction bornée et positive, intégrable en sens de Riemann et L, $\theta(\omega)$, $\mu(\sigma)$ ayant le même sens que dans le § 4.

En cherchant suivant les règles des §§ 1 et 2 la fonction harmonique $w(x)$, vérifiant la condition

$$\sigma^{(i)}(w) = -(hw)_\sigma + \mu(\sigma)$$

et en posant $u = v + w$ on transforme le problème (A_8) en problème (B_8) de la construction d'une fonction sommable $v(x)$, qui satisfait à l'équation

$$(20_1) \qquad \Delta v(w) = \omega(Lv) + \vartheta(\omega),$$

où

$$\vartheta(\omega) = \theta(\omega) + \omega(Lw),$$

et aux conditions sur la frontière

$$(21_8) \qquad \sigma^{(i)}(v) = -(hv)_\sigma.$$

Cette fonction, en vérifiant l'équation (20_1), est donnée, si on rejette le terme, qui est égal à zéro presque partout, par l'équation (22); la fonction harmonique $H(x)$ doit vérifier sur la frontière la condition

$$\sigma^{(i)}(H) + (hH)_\sigma = \sigma^{(i)}(v_1) + (hv_1)_\sigma,$$

où

$$v_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\frac{d\tau}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\frac{d\tau}{r_{10}}$$

les moyennes $\sigma^{(i)}(v_1)$ et $v_1(\sigma)$ existant, comme il est démontré dans les §§ 4 et 5.

Suivant le théorème du § 2, le point (x) étant dans l'intérieur de (Ω),

$$H(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} [\sigma_2^{(i)}(v_1) + (hv_1)\sigma_2]\, G(2, 0)\, d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} \left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}\, d\sigma_2\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{h(x_2)}{r_{12}}\, d\sigma_2\right) d\tau\right\} G(2, 0)\, d\sigma_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)} \left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}\, d\sigma_2\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\left(\frac{1}{\sigma_2}\int\limits_{(\sigma_2)} \frac{h(x_2)}{r_{12}}\, d\sigma_2\right) d\tau\right\} G(2, 0)\, d\sigma_2 =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}+\frac{h(x_2)}{r_{12}}\right)G(2,0)\,d\sigma_2\right\}d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S_2)}\left(\frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2}+\frac{h(x_2)}{r_{12}}\right)G(2,0)\,d\sigma_2\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\Gamma(1,0)\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\Gamma(1,0)\,d\tau,$$

où $G(1, 0)$ est la fonction de Green du problème de la température stationnaire et $\Gamma(1, 0)$ la fonction, introduite dans le § 2.

On conclut de là que

$$(25)\qquad v(\omega)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\,G(1,\omega)\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,G(1,\omega)\,d\tau$$

et qu'on peut donner à cette équation la forme

$$(25_1)\qquad v(\omega)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}L(y)\,G(1,\omega)\,v(\tau)\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,G(1,\omega)\,d\tau.$$

7. La résolution des problèmes (A_1), (A_2) et (A_3) est donc réduite à l'équation

$$(25)\qquad v(\omega)=\lambda\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(Lv)\,G(1,\omega)\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,G(1,\omega)\,d\tau,\quad \lambda=-\frac{1}{4\pi}.$$

En la multipliant par $L(x)$ et en intégrant, on obtient, en appliquant le théorème du § 9 (2),

$$\omega(Lv)=\frac{\lambda}{\omega}\int\limits_{(\omega)}L(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)}G(1,\omega)\,\tau(Lv)\,d\tau\Big)d\omega-$$

$$(30)\qquad -\frac{1}{4\pi\omega}\int\limits_{(\omega)}L(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)\,G(1,\omega)\,d\tau\Big)d\omega=$$

$$=\lambda\int\limits_{(\Omega_y)}k(\omega,1)\,\tau(Lv)\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}k(\omega,1)\,\vartheta(\tau)\,d\tau$$

en posant,

$$k(\omega,y)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)}L(x)\,G(1,\omega)\,d\omega\cdot$$

En effet, si (η) est le domaine, contenant tous les points de discontinuité de $L(x)$, on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} G(1,\ \omega)\,\tau(Lv)\,d\tau\Big)\,d\omega =$$

$$= \lim \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega-\eta\omega)} L(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} G\,(1,\ \omega)\,\tau(Lv)\,d\tau\Big)\,d\omega =$$

$$= \lim \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\Big(\int\limits_{(\omega-\eta\omega)} L(x)\,G(1,\ \omega)\,d\omega\Big)\,d\tau = \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega,\ 1)\,\tau(Lv)\,d\tau,$$

l'intégrale

$$\int\limits_{(\eta\omega)} L(x)\,G(1,\ \omega)\,d\omega = \int\limits_{(\eta\omega)} L(x)\,G(1,\ 0)\,d\omega$$

étant infiniment petite avec (η), car la fonction $L(x)\,G(1,\ 0)$ est intégrable. Nous désignons ici par $(\eta\omega)$ la partie commune des domaines (ω) et (η).

Nous aboutissons ainsi à envisager l'équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_{(\Omega_y)} k(\tau,\ x)\,\varphi(y)\,d\tau + f(x). \tag{31}$$

8. Démontrons que le noyau $k(\tau, x)$ de l'équation (31) répond aux éconditions (C) et (D) du chapitre 4, la fonction $u(\omega)$, qui y est introduite, tant égale à

$$L(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L\,(x)\,d\omega\,.$$

Pour démontrer que la condition (C)

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(\omega)\,k(\tau,\ x)\,d\omega = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(\tau)\,k(\omega, y)\,d\tau$$

subsiste, supposons en premier lieu que le domaine (ω) est dans l'intérieur du domaine (Ω_x). Nous avons

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(\omega)\,k(\tau,\ x)\,d\omega = \frac{1}{\omega\tau}\int\limits_{(\omega)} L(x)\Big(\int\limits_{(\tau)} L(y)\,G(0,\ 1)\,d\tau\Big)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\omega\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y) \Big(\int\limits_{(\omega)} L(x)\, G(0,\, 1)\, d\omega \Big) d\tau = \frac{1}{\omega\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y) \Big(\int\limits_{(\omega)} L(x)\, G(1,\, 0)\, d\omega \Big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(\tau)\, k(\omega,\, 1)\, d\tau,$$

les intégrales

$$\int\limits_{(\tau)} \frac{L(y)}{r_{10}}\, d\tau, \quad \int\limits_{(\omega)} \frac{L(x)}{r_{10}}\, d\omega$$

étant uniformément convergentes dans (ω), respectivement dans (τ), et la fonction Γ (1, 0) étant continue suivant la supposition faite à propos de (ω).

Si (ω) a une position quelconque et si $(\underline{\omega})$ est dans l'intérieur de (ω) et tend vers (ω), on a

$$\lim \frac{1}{\underline{\omega}} \int\limits_{(\underline{\omega})} L(\omega)\, k(\tau,\, x)\, d\omega = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} L(\omega)\, k(\tau,\, x)\, d\omega$$

et, la fonction moyenne $k(\omega,\, y)$ étant absolument continue,

$$\lim \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(\tau)\, k(\underline{\omega},\, y)\, d\tau = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(\tau)\, k(\omega,\, y)\, d\tau.$$

La condition (C) subsiste, donc, pour tous les domaines (ω).

Formons maintenant le noyau itéré du noyau $k(\tau,\, x)$. On trouve

$$k_2(\tau,\, x) = \int\limits_{(\Omega_z)} k(\tau,\, \xi)\, k(\xi,\, x)\, d\xi =$$

(32)
$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\Omega_z)} k(\xi,\, x) \Big(\int\limits_{(\tau)} L(y)\, G(\tau,\, 2)\, d\tau \Big) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_{(\tau)} L(y) \Big(\int\limits_{(\Omega_z)} G(\tau,\, 2)\, k(\xi,\, x)\, d\xi \Big) d\tau,$$

car en appliquant le théorème du § 9 (2), on a

$$\int\limits_{(\tau)} L(y) \Big(\int\limits_{(\Omega_z)} G(\tau,\, z)\, k(\xi,\, x)\, d\xi \Big) d\tau = \lim \int\limits_{(\tau - \tau\eta)} L(y) \Big(\int\limits_{(\Omega_z)} G(\tau,\, z)\, k(\xi,\, x)\, d\xi \Big) d\tau =$$

$$= \lim \int\limits_{(\Omega_z)} k(\xi,\, x) \Big(\int\limits_{(\tau - \tau\eta)} L(y)\, G(\tau,\, 2)\, d\tau \Big) d\xi = \int\limits_{(\Omega_z)} k(\xi,\, x) \Big(\int\limits_{(\tau)} L(y)\, G(\tau,\, 2)\, d\tau \Big) d\xi.$$

Or, on a

$$(33) \qquad \int\limits_{(\Omega_z)} G(\tau, 2)\, k(\xi, x)\, d\xi = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\Omega_z)}\Big(\int\limits_{(\tau)} G(1, 2)\, d\tau\Big) k(\xi, x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)}\Big(\int\limits_{(\Omega_z)} k(\xi, x)\, G(1, 2)\, d\xi\Big) d\tau.$$

Si (τ) est à l'intérieur de (Ω_y), la fonction $\Gamma(1, 2)$ est continue comme une fonction de (z) et l'égalité

$$\int\limits_{(\Omega_z)}\Big(\int\limits_{(\tau)} \Gamma(1, 2)\, d\tau\Big) k(\xi, x)\, d\xi = \int\limits_{(\tau)}\Big(\int\limits_{(\Omega_z)} k(\xi, x)\, \Gamma(1, 2)\, d\xi\Big) d\tau$$

est une conséquence du théorème du § 8 (2).

L'égalité

$$\int\limits_{(\Omega_z)}\Big(\int\limits_{(\tau)} \frac{d\tau}{r_{12}}\Big) k(\xi, x)\, d\xi = \int\limits_{(\tau)}\Big(\int\limits_{(\Omega_z)} \frac{k(\xi, x)}{r_{12}}\, d\xi\Big)\, d\tau$$

subsiste comme conséquence du théorème du § 12 (2), car les intégrales

$$(34) \qquad \int\limits_{(\tau)} \frac{d\tau}{r_{12}} \cdot \int\limits_{(\Omega_z)} \frac{K(\xi, x)}{r_{12}}\, d\xi$$

sont uniformément convergentes dans (Ω_z), respectivement dans (τ).

En effet, si (ζ_0) est une sphère du rayon ρ, on, a suivant les formules du § 10 (2),

$$\int\limits_{(\zeta_0)} \frac{L(z)}{r_{20}}\, d\xi = \int\limits_{(\zeta_0)} \frac{L(\xi)}{r_{20}}\, d\xi < C\rho^{1+\lambda}, \quad \Big(\frac{1}{\zeta_0}\int\limits_{(\zeta_0)} \frac{L(\xi)}{r_{20}}\, d\xi\Big)\rho^{2-\lambda} < C_1$$

les nombres α et k du dit paragraphe étant égaux à $1-\lambda$ et 1; de même, si $\underline{\Gamma}(\xi, 0)$ est la variation de $\Gamma(\xi, 0)$, comme on a

$$\underline{\Gamma}(\zeta_0, 0)\rho^{2-\lambda} \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)}\Big(\frac{1}{\zeta_0}\int\limits_{(\zeta_0)} \frac{L(z)}{r_{32}}\, d\xi\Big)\rho^{2-\lambda}\, |H(3, 0)|\, d\sigma_3 < \frac{C_1}{2\pi}\int\limits_{(S_3)} |H(3, 0)|\, d\sigma_3,$$

on voit que le produit

$$K(\zeta_0, x)\rho^{2-\lambda}$$

est borné, $K(\xi, x)$ étant la variation de $k(\xi, x)$. Il suit de là, suivant la remarque du § 3, la convergence uniforme de la seconde des intégrales (34). On conclut, de même, des considérations qui précèdent en appliquant la remarque du § 3, que l'intégrale

$$(35)\quad \begin{aligned} l(x, y) &= \int_{(\Omega_z)} k(\xi, x)\, G(1, 2)\, d\xi = \int_{(\Omega_z)} L(z)\, G(2,0)\, G(1,2)\, d\xi = \\ &= \int_{(\Omega_z)} k(\xi, y)\, G(0,2)\, d\xi \end{aligned}$$

est une fonction uniformément continue du point (y), ainsi que du point (x), c equi permet d'étendre, en passant à la limite, la formule (33) sur tous les domaines (τ).

On démontre maintenant sans peine que $l(y, x)$ est une fonction continue des points (x) et (y) dans (Ω_z) et (Ω_x). Comme on a

$$\int_{(\Omega_z)} k(\xi, x_1)\, G(y_1, 2)\, d\xi - \int_{(\Omega_z)} k(\xi, x)\, G(y, 2)\, d\xi =$$

$$= \int_{(\Omega_z)} [k(\xi, x_1) - k(\xi, x)]\, G(y_1, 2)\, d\xi + \int_{(\Omega_z)} k(\xi, x)[G(y_1, 2) - G(y, 2)]\, d\xi$$

il suffit de démontrer que (35) est continue comme fonction de(x) et comme fonction de (y); or cela est fait ci-dessus.

En substituant la valeur de (33) dans (32), on obtient

$$(36)\quad \begin{aligned} k_2(\tau, x) &= \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} L(y)\left(\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)}\left(\int_{(\Omega_z)} k(\xi, x)\, G(1, 2)\, d\xi\right) d\tau\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} L(y)\left(\int_{(\Omega_x)} k(\xi, x)\, G(1, 2)\, d\xi\right) d\tau. \end{aligned}$$

Comme on a définitivement

$$(36')\quad k_2(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} L(y)\, l(x, y)\, d\tau,$$

la fonction $l(x, y)$ étant continue dans le domaine de son existence, le noyau $k_2(\tau, x)$ est fini et on a, entre autres,

$$|k_2(\tau, x)| < CL(\tau).$$

Le second noyau répondant strictement à la condition (D), le noyau $k(\tau, x)$ répond à la condition (D) suivant les théorèmes du § 1 (4).

9. Les résultats des §§ 8—13 du chapitre 3 donnent maintenant que: 1) les fonctions fondamentales de l'équation (31) forment une suite orthogonale par rapport à $L(\omega)$, 2) que ses nombres caractéristiques sont réels, 3) qu'il existe au moins un nombre caractéristique, 4) que le nombre des fonctions fondamentales qui correspondent à un nombre caractéristique λ' est égal à l'ordre de la racine λ' du déterminant de Fredholm.

Soit $\varphi(x)$ la fonction fondamentale, attachée à un nombre caractéristique λ. On s'assure sans peine que $\varphi(x)$ est continue dans (Ω_x).

En effet, comme on a

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(\Omega_y)} k_2(\tau, x)\varphi(y)\,d\tau = \lambda^2 \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,l(x, y)\,\varphi(y)\,d\tau,$$

on trouve

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqq \lambda^2 \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,|\varphi(y)|\,|l(x_1, y) - l(x_2, y)|\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \lambda^2 \varepsilon \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,|\varphi(y)|\,d\tau,$$

si la distance entre les points (x_1) et (x_2) est suffisamment petite.

On démontre sans peine que chaque solution de l'équation homogène

$$(30') \qquad \psi(\omega) = \lambda \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, 1)\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

qui est associée à l'équation (31), est égale à la moyenne

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} L(y)\,\varphi(x)\,d\omega$$

de la fonction fondamentale de l'équation (31).

Si l'équation (30') est satisfaite, on a

$$\psi(\omega)=\lambda^2\int\limits_{(\Omega_y)} k_2(\omega,\ 1)\psi(\tau)\,d\tau=\frac{\lambda^2}{\omega}\int\limits_{(\Omega_y)}\Big(\int\limits_{(\omega)} L(x)\,l(x,\ y)\,d\omega\Big)\psi(\tau)\,d\tau.$$

Or, on a, suivant le théorème du § 8 (2),

$$\int\limits_{(\Omega_y)}\Big(\int\limits_{(\omega)} L(x)\,l(x,\ y)\,d\omega\Big)\psi(\tau)\,d\tau=\int\limits_{(\Omega_y)}\Big(\int\limits_{(\omega)} L(\omega)\,l(x,\ y)\,d\omega\Big)\psi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{(\omega)} L(\omega)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} l(x,\ y)\psi(\tau)\,d\tau\Big)d\omega=\int\limits_{(\omega)} L(x)\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} l(x,\ y)\psi(\tau)\,d\tau\Big)d\omega.$$

La fonction

$$\varphi(x)=\int\limits_{(\Omega_y)} l(x,\ y)\psi(\tau)\,d\tau \tag{37}$$

est continue, la fonction $l(x,\ y)$ étant continue pour toutes les positions des points (x) et (y). On a donc

$$\psi(\omega)=\frac{\lambda^2}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\,\varphi(x)\,d\omega.$$

En substituant cette valeur dans (37) on trouve finalement

$$\varphi(x)=\lambda^2\int\limits_{(\Omega_y)} l(x,\ y)\Big(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(y)\,\varphi(y)\,d\tau\Big)d\tau=\lambda^2\int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,l(x,\ y)\,\varphi(y)\,d\tau,$$

d'où suit que $\varphi(x)$ est la fonction fondamentale de l'équation (31). Comme $\varphi(x)$, étant la fonction fondamentale, est égale à la somme de deux intégrales

$$\lambda\int\limits_{(\Omega_y)}\frac{L(\tau)}{r_{10}}\varphi(y)\,d\tau;\quad \lambda\int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\,\Gamma(1,\ 0)\,\varphi(y)\,d\tau$$

$\varphi(x)$ possède les dérivées dans l'intérieur de (Ω_x); la première intégrale, grâce aux suppositions faites à propos de $L(y)$, a les dérivées régulièrement

continues dans (Ω_x); $\Gamma(1, 0)$ est harmonique dans l'intérieur de (Ω_x). Comme on a

$$(30') \qquad \varphi(\omega) = \lambda \int_{(\Omega_y)} k(\omega, 1)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

on dans l'intérieur de (Ω_x)

$$(38) \qquad \Delta\varphi(\omega) = -4\pi\lambda\omega(L\varphi),$$

ou, comme φ possède les dérivées,

$$(38') \qquad \sigma(\varphi)\sigma = \int_{(\sigma)} \frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma = -4\pi\lambda \int_{(\omega)} L\varphi\,d\omega = -4\pi\lambda\omega(L\varphi)\,\omega,$$

(σ) étant la frontière de (ω).

Sur la frontière (S) de (Ω_x) une des conditions est satisfaite

$$\text{ou } \varphi = 0, \quad \text{ou } \sigma^{(i)}(\varphi) = 0, \quad \text{ou } \sigma^{(i)}(\varphi) = -(h\varphi)_\sigma.$$

Ayant remarqué tout cela, on peut démontrer l'identité

$$(39) \quad -4\pi\lambda \int_{(\Omega_x)} L\varphi^2\,d\omega = \int_{(S)} \varphi\sigma^{(i)}(\varphi)\,d\sigma - \int_{(\Omega_x)} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2 \right\} d\tau,$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées du point (x).

L'identité (39) conduit dans les cas des problèmes (A_1) et (A_2) à l'égalité

$$(40) \qquad 4\pi\lambda \int_{(\Omega_x)} L\varphi^2\,d\omega = \int_{(\Omega_x)} \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 d\tau$$

et dans le cas du problème (A_3) à l'égalité

$$(40') \qquad 4\pi\lambda \int_{(\Omega_x)} L\varphi^2\,d\omega = \int_{(S)} h\varphi^2\,d\sigma + \int_{(\Omega_x)} \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 d\tau.$$

On en conclut, en premier lieu, que tous les nombres caractéristiques des équations (30) et (31) sont positifs et, en second lieu, que la solution

de l'équation (30) pour $\lambda = -\frac{1}{4\pi}$ est unique, le nombre $-\frac{1}{4\pi}$ ne pouvant pas être un nombre caractéristique; la supposition que φ est une constante est exclue par les restrictions, imposées à la fonction $L(x)$.

Les solutions des problèmes (A_1), (A_2) et (A_3) sont, donc, uniques.

Nous prouverons l'identité (39) dans le paragraphe suivant et nous finirons ce paragraphe en démontrant que le nombre des fonctions fondamentales de l'équation (31) est illimité.

Dans le cas contraire, il existe seulement un nombre fini des fonctions fondamentales

(41) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

qui sont toutes continues, et on peut former une fonction continue P, qui est orthogonale à toutes les fonctions (41).

Or, le nombre des fonctions fondamentales étant limité, on a suivant le théorème du § 6 (4), en supposant la suite (41) orthogonale et normée,

$$k(\tau, x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k}.$$

Il suit de là que

$$\int_{(\Omega_y)} k(\tau, x) P(y)\, d\tau = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_{(\Omega_y)} \varphi_k(\tau) P(y)\, d\tau = 0.$$

La dernière égalité montre qu'on a pour chaque domaine (ω)

$$\omega(LP) = 0 = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} L(\omega) P(x)\, d\omega = 0.$$

En se servant du théorème de la moyenne et en supposant que (ω) est une sphère, ayant le centre au point (x), on obtient

$$L(\omega) P(x_1) = 0, \quad P(x_1) = 0,$$

d'oú suit, quand on fait tendre le rayon de la sphère vers zéro, qu'en chaque point $P(x) = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

10. Il reste à démontrer l'identité (39).

Envisageons les réseaux (R_n) du § 1 (1), en supposant que toutes les intervalles des réseaux sont les cubes. Soit l_n la longueur d'arête d'un cube appartenant à (R_n).

Introduisons la fonction de Stekloff

$$\Phi(x) = \frac{1}{l_n^3} \int_{\xi}^{\xi+l_n} \int_{\eta}^{\eta+l_n} \int_{\zeta}^{\zeta+l_n} \varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \omega_n(\varphi). \tag{42}$$

Comme la fonction $\varphi(x)$ possède les dérivées premières, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \omega_n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\omega_n} \sigma_n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cos(N\xi)\right), \quad \Delta\Phi = \frac{1}{\omega_n} \int_{(\sigma_n)} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = \omega_n(L\varphi),$$

en désignant par (σ_n) la frontière du cube (ω_n).

Désignons par $(\underline{\Omega}_m)$ le domaine inscrit dans (Ω_x) et formé par les intervalles du réseau (R_m); on a

$$\int_{(\Omega_x)} L\varphi^2\, d\omega = \lim \int_{(\underline{\Omega}_m)} L\varphi^2\, d\omega, \quad m \to \infty. \tag{43}$$

En évaluant l'intégrale

$$\int_{(\underline{\Omega}_m)} L\varphi^2\, d\omega = \int_{(\underline{\Omega}_m)} \varphi\omega(L\varphi)\, d\omega$$

comme la limite d'une somme, on peut partager $(\underline{\Omega}_m)$ en cubes, appartenant au réseau (R_n). On a, pour $n \to \infty$,

$$-4\pi\lambda \int_{(\underline{\Omega}_m)} L\varphi^2\, d\omega = -4\pi\lambda \lim \Sigma \varphi_i\, \omega_n(L\varphi_i)\, \omega_n = \lim \Sigma \varphi_i \int_{(\sigma_n^{(i)})} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma, \tag{44}$$

en désignant par (x_i) le sommet du cube portant le numéro i et par $(\sigma_n^{(i)})$ sa frontière.

Or

$$\int_{(\sigma_n^{(i)})} \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = \int_{\eta_i}^{\eta_i+l_n} \int_{\zeta_i}^{\zeta_i+l_n} (\varphi_\xi'(\xi_i+l_n, \eta_1, \zeta_1) - \varphi'_\xi(\xi_i, \eta_1, \zeta_1))\, d\eta_1\, d\zeta_1 +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\xi_i+l_n} \int_{\zeta_i}^{\zeta_i+l_n} (\varphi'_\eta(\xi_1, \eta_i+l_n, \zeta_1) - \varphi_\eta'(\xi_1, \eta_i, \zeta_1))\, d\xi_1\, d\zeta_1 +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\xi_i+l_n} \int_{\eta_i}^{\eta_i+l_n} (\varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_i+l_n) + \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_i))\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

Étudions la somme

$$\Sigma\varphi_i \int_{\xi_i}^{\xi_i+l_n} \int_{\eta_i}^{\eta_i+l_n} (\varphi'_\zeta(\xi_1, \eta_1, \zeta_i+l_n) - \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_i))\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{45}$$

En additionnant les termes dans chaque colonne séparément on obtient pour une colonne

$$\Sigma \left\{ \varphi_{i+1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_{i+1})\, d\xi_1\, d\eta_1 - \varphi_i \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_i)\, d\xi_1\, d\eta_1 \right\} -$$

$$- \Sigma(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta_{i+1})\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \varphi'' \int_{\xi''-l_n}^{\xi''} \int_{\eta''-l_n}^{\eta''} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta'')\, d\xi_1\, d\eta_1 - \varphi' \int_{\xi'}^{\xi'+l_n} \int_{\eta'}^{\eta'+l_n} \varphi'_\zeta(\xi_1, \eta_1, \zeta')\, d\xi_1\, d\eta_1 -$$

$$- \Sigma\varphi_\zeta'(\xi_i, \eta_i, \zeta_i')\, \varphi_\zeta'(\xi_i', \eta_i', \zeta_{i+1})\, \omega_n,$$

en désignant par φ'', ζ'', φ', ζ' les valeurs extrêmes des φ, ζ dans la colonne et par ξ_i', η_i', ζ_i' les nombres dans les intervalles (ξ_i, ξ_{i+1}), (η_i, η_{i+1}), (ζ_i, ζ_{i+1}).

La dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ étant bornée et continue dans $(\underline{\Omega_m})$, les quantités

$$\varphi'' \int_{\xi''-l_n}^{\xi''} \int_{\eta''-l_n}^{\eta''} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta'') d\xi_1 d\eta_1, \quad \varphi' \int_{\xi'}^{\xi'+l_n} \int_{\eta'}^{\eta'+l_n} \varphi_\zeta'(\xi_1, \eta_1, \zeta') d\xi_1 d\eta_1,$$

$$\varphi_\zeta'(\xi_i, \eta_i, \zeta_i') \cdot \varphi'_\zeta(\xi_i', \eta_i', \zeta_{i+1})$$

diffèrent, si n est assez grand, aussi peu qu'on le veut de

$$\varphi'' \varphi_\zeta'(\xi'', \eta'', \zeta'') l_n^2, \quad \varphi' \varphi_\zeta'(\xi', \eta', \zeta') l_n^2, \quad (\varphi_\zeta'(\xi_i, \eta_i, \zeta_i))^2$$

Comme dans les cubes extrêmes de la colonne $\cos(N\zeta)$ est égal à $+1$ ou à -1, on obtient de là que la limite de (45) pour $n \to \infty$ est égale à

$$\int_{(S_m)} \varphi \frac{d\varphi}{d\zeta} \cos(N\zeta) d\sigma - \int_{(\underline{\Omega_m})} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2 d\omega,$$

en désignant par (S_m) la frontière de $(\underline{\Omega_m})$.

On en conclut que

$$(46) \quad \begin{aligned} -4\pi\lambda \int_{(\underline{\Omega_m})} L\varphi^2 d\omega &= \int_{(S_m)} \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma - \int_{(\underline{\Omega_m})} \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 d\omega = \\ &= \int_{(S_m)} \varphi \sigma(\varphi) d\sigma - \int_{(\underline{\Omega_m})} \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 d\omega. \end{aligned}$$

Or, dans le § 1 nous avons démontré que si $(\underline{\Omega_m})$ tend vers (Ω_a), on a

$$\lim \int_{(S_m)} \varphi \sigma(\varphi) d\sigma = \int_{(S)} \varphi \sigma^{(i)}(\varphi) d\sigma.$$

Comme

$$\int_{(\Omega_m)} L\varphi^2 d\omega$$

et

$$\int_{(S_m)} \varphi \sigma(\varphi) d\sigma$$

ont des limites, l'intégrale

$$\int\limits_{\underline{(\Omega_m)}} \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 d\omega$$

en a une aussi et les égalités (43) et (44) donnent

$$(39) \qquad -4\pi\lambda \int\limits_{(\Omega_x)} L\varphi^2 \, d\omega = \int\limits_{(S)} \varphi\sigma^{(i)}(\varphi)\, d\sigma - \int\limits_{(\Omega_x)} \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 d\omega$$

ce qu'il fallait démontrer.

11. Supposons que la suite des fonctions fondamentales de l'équation (31)

$$(47) \qquad \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$$

est normée et orthogonale. Désignons par λ_k le nombre caractéristique attaché à la fonction $\varphi_k(x)$.

Suivant le § 4 (4) les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}, \quad k_2(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}, \quad \varphi_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(y)\varphi_k(y)\, d\tau,$$

sont uniformément convergentes comme fonctions de (x), (y) et (τ) étant donnés, et comme fonction de (y), respectivement de (τ), le point (x) étant fixé; suivant le § 5 (4) les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}, \quad k_l(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^l}, \quad l > 3$$

sont uniformément convergentes comme fonctions de leurs arguments. Suivant le § 13 (4), si

$$F(\tau) = \int\limits_{(D_z)} L(\xi)\, k(\tau, z) f(z)\, d\xi, \quad F(y) = \int\limits_{(D_z)} k(\xi, y) f(z)\, d\xi,$$

la fonction $f(z)$ étant continue, on a

$$(48)\quad F(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(\tau),\quad F(y)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(y),\quad c_k=\int_{(\Omega_y)} F(\tau)\varphi_k(y)\,d\tau,$$

les séries étant uniformément convergentes.

Suivant le § 14 (4) on a

$$w(\tau)=\int_{(\Omega_x)} k_2(\tau, x)v(\omega)\,d\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\tau)\int_{(\Omega_y)} w(\tau)\varphi_k(y)\,d\tau=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\int_{(\Omega_x)}\varphi_k(x)v(\omega)\,d\omega,$$

la série étant convergente, la convergence uniforme n'étant pas démontrée.

Les théorèmes du § 16 (4) permettent, enfin, de développer les solutions de l'équation (31) et de son associée suivant les fonctions fondamentales et leurs valeurs moyennes.

Ayant en vue les applications, nous pouvons, comme $L(\omega)$ est la moyenne d'une fonction sommable, considérablement généraliser la première des formules (48).

On peut, effectivement, laisser à côté la supposition que la fonction $f(z)$ est continue, en supposant seulement, qu'elle est sommable en sens de M. Lebesgue, ayant le carré sommable et telle que les produits Lf et Lf^2 soient sommables aussi.

Nous dirons que la fonction sommable $f(x)$ répond à la condition (L), si la fonction Lf^2 est sommable.

Pour démontrer notre assertion, remarquons qu'en établissant l'inégalité de Bessel comme dans le § 3 (4), on peut à la place d'une fonction continue $f(x)$ prendre la fonction assujettie aux conditions mentionnées, si la fonction L est la moyenne d'une fonction sommable. En effet

$$0\leq\int_{(\Omega_x)} L\left(f-\sum_{k=1}^{k=n} c_k\varphi_k(x)\right)^2 d\omega=\int_{(\Omega_x)} Lf^2\,d\omega-\sum_{k=1}^{k=n} c_k^2,$$

si

$$c_k=\int_{(\Omega_x)} Lf\varphi_k\,d\omega=\int_{(\Omega_x)}\omega(Lf)\varphi_k\,d\omega.$$

Dans le § 10 (4) ayant posé

$$k(\tau, x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} + R_n(\tau, x)$$

nous avons démontré que

$$\int_{(\Omega_x)} L(\omega) R_n^2(\tau, x)\, d\omega < A(\tau), \quad \text{si } n \geqq N,$$

quand

$$\left| \left(\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} L(\omega) k_2(\tau, x)\, d\omega \right)_{\tau=\omega} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2} \right| < A(\omega), \quad \text{si } n \geqq N.$$

Soit

$$F(\tau) = \int_{(\Omega_z)} k(\tau, z)\zeta(Lf)\, d\zeta,$$

la fonction $f(z)$ répondant à la condition (L).

On trouve

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k(\tau)}{\lambda_k} \int_{(\Omega_z)} \zeta(Lf)\varphi_k(z)\, d\zeta + \int_{(\Omega_z)} R_n(\tau, z)\zeta(Lf)\, d\zeta.$$

Comme on a, $R_n(\tau, z)$ étant continue,

$$\int_{(\Omega_z)} R_n(\tau, z)\zeta(Lf)\, d\zeta = \int_{(\Omega_z)} LR_n(\tau, z) f\, d\zeta,$$

l'inégalité de Schwarz donne

$$\left(\int_{(\Omega_z)} R_n(\tau, z)\zeta(Lf)\, d\zeta \right)^2 < \int_{(\Omega_z)} Lf^2\, d\zeta \,.\, A(\tau), \quad \text{si } n \geqq N.$$

En appliquant les raisonnements qui concernent seulement les développements des noyaux itérés et qui sont tout à fait indépendants du choix

de la fonction $f(x)$, nous avons établi dans le § 11 (4), en se basant sur la dernière inégalité que si l'un des noyaux itérés $k_l(\tau, x)$ est fini, la série

$$(48') \quad F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\tau), \quad c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{(\Omega_z)} \zeta(Lf) \varphi_k(z) d\zeta = \int_{(\Omega_y)} F(\tau) \varphi_k(y) d\tau$$

est convergente. On démontre que la convergence de la série est uniforme par les raisonnements du § 12 (4). Comme

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} h_k, \quad h_k = \int_{(\Omega_z)} \zeta(Lf) \varphi_k(z) d\zeta,$$

on peut écrire

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} |c_k| \, |\varphi_k(\tau)|\right)^2 = \left(\sum_{k=n}^{k=m} |h_k| \frac{|\varphi_k(\tau)|}{\lambda_k}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} h_k^2 \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\tau)}{\lambda_k^2} <$$

$$< \varepsilon \int_{(\Omega_x)} L(\omega) k^2(\tau, x) d\omega < \varepsilon C^2 L^2(\tau),$$

h_k étant le coefficient de Fourier pour la fonction $f(z)$ et le noyau $k(\tau, x)$ satisfaisant à la condition (D). Il suit de là que le terme complémentaire de la série (48') est moindre que

$$\sqrt{\varepsilon}\, C L(\tau)$$

d'où l'on conclut, suivant le lemme du § 3 (4), que la série (48') converge uniformément et absolument.

Remarque. Comme application du dernier théorème, citons: si $f(y)$ est une fonction à carré sommable, la moyenne du potentiel newtonien

$$v(x) = \int_{(\Omega_x)} \frac{f(y)}{r_{10}} d\tau$$

est développable dans une série uniformément convergente, suivant les moyennes des fonctions universelles de M. A. Korn.

Ces fonctions sont les fonctions fondamentales de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{\varphi(y)}{r_{10}} d\tau + F(x) = \lambda \int\limits_{(\Omega_y)} m(\tau, x) \varphi(y) d\tau + F(x),$$

dont le noyau $m(\tau, x)$ possède les propriétés du noyau $k(\tau, x)$ de l'équation (31).

12. La convergence uniforme de la seconde série (48) montre que la suite des fonctions fondamentales est fermée dans le corps des fonctions de la forme

(49) $$F(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} k(\tau, x) f(y) d\tau, \quad f(y) \text{ continue.}$$

Comme on peut donner à la dernière égalité la forme

(49') $$F(x) = \int\limits_{(\Omega_y)} L(\tau) G(1, 0) f(y) d\tau = \int\limits_{(\Omega_y)} \frac{L(\tau) f(y)}{r_{10}} d\tau + \int\limits_{(\Omega_y)} L(\tau) \Gamma(1, 0) f(y) d\tau$$

on voit, en rappelant les propriétés de $L(x)$, que la fonction $F(x)$ est continue, possède les dérivées premières dans l'intérieur de (Ω_x) et que

$$\int\limits_{(\sigma)} \frac{dF}{dn} d\sigma = -4\pi\omega (Lf) \omega$$

pour chaque domaine (ω) contenu dans (Ω_x) et limité par (σ); de plus, sur la frontière (S), $F(x)$ vérifie une des conditions

$$\alpha)\ F = 0, \quad \beta)\ \sigma^{(i)}(F) = 0, \quad \gamma)\ \sigma^{(i)}(F) + (hF)_\sigma = 0.$$

Inversement, chaque fonction vérifiant les conditions mentionnées peut être representée par la formule (49). Il suit des considérations des §§ 4, 5, 6 que sa moyenne vérifie l'équation

$$F(\omega) = \int\limits_{(\Omega_y)} L(\tau) G(1, \omega) f(y) d\tau = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} \Big(\int\limits_{(\Omega_y)} L(\tau) G(1, 0) f(y) d\tau \Big) d\omega,$$

d'où l'on conclut facilement que l'égalité (49) subsiste.

En répétant maintenant les raisonnements des §§ 10—12 du chapitre 2 du mémoire de Stekloff «Théorie générale des fonctions fondamentales»* on s'assure aisément que la suite de fonctions fondamentales est fermée dans le corps de fonctions bornées et intégrables en sens de Riemann.

Effectivement, toutes les formules des dits §§ subsistent, si l'on comprend sous p la fonction moyenne $L(\omega)$ et si l'on traite les intégrales comme les intégrales de Stieltjes, les intégrales ayant un sens, car la fonction $L(\omega)$ est absolument continue.

Lemme. Soit donnée une fonction $f(x)$, qui appartient à un corps (A) des fonctions. Si, quel que soit le nombre positif ε, il existe une fonction f_m, qui appartient au corps des fonctions, pour lequel la fermeture de la suite (47) est établie, telle que

$$\int\limits_{(\Omega_x)} L(\omega)(f-f_m)^2\, d\omega < \varepsilon, \tag{50}$$

la suite (47) est fermée dans le corps (A).

Posons

$$f=\sum_{k=1}^{k=n} a_k \varphi_k + R_n, \quad a_k=\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lf)\varphi_k\, d\tau$$

$$f_m=\sum_{k=1}^{k=n} b_k \varphi_k + R_n', \quad b_k=\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lf_m)\varphi_k\, d\tau$$

et supposons que pour $n \geqq N$,

$$\int\limits_{(\Omega_y)} LR_n'^2\, d\tau < \varepsilon.$$

Comme on a

$$\int\limits_{(\Omega_y)} L\varphi_k R_n'\, d\tau = 0, \quad \int\limits_{(\Omega_y)} L\varphi_k R_n\, d\tau = 0,$$

on trouve, en posant

$$S_n=\int\limits_{(\Omega_y)} LR_n^2\, d\tau,$$

* Annales de Toulouse, t. 6, 1905.

que

$$S_n = \int\limits_{(\Omega_y)} Lf R_n \, d\tau, \quad \int\limits_{(\Omega_y)} Lf_m R_n \, d\tau = \int\limits_{(\Omega_y)} Lf R_n' \, d\tau.$$

Il suit de là que

$$S_n = \int\limits_{(\Omega_y)} Lf R_n' \, d\tau + \int\limits_{(\Omega_y)} L(f - f_m) R_n \, d\tau$$

et

$$S_n^2 \leqq \int\limits_{(\Omega_y)} Lf^2 \, d\tau \, . \int\limits_{(\Omega_y)} L R_n'^2 \, d\tau + \int\limits_{(\Omega_y)} L R_n^2 \, d\tau \, . \int\limits_{(\Omega_y)} L(f - f_m)^2 \, d\tau <$$

$$< \int\limits_{(\Omega_y)} Lf^2 \, d\tau \, . \int\limits_{(\Omega_y)} L R_n'^2 \, d\tau + \frac{1}{2} S_n^2 + \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{(\Omega_y)} L(f - f_m)^2 \, d\tau \right\}^2 .$$

On en conclut que pour $n \geqq N$

$$S_n^2 < C\varepsilon + C_1 \varepsilon^2$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour étendre le corps, pour lequel la fermeture de la suite (47) est établie, envisageons en premier lieu les fonctions $f(x)$ bornées et intégrables en sens de M. Lebesgue.

Supposons, qu'on connait une suite des fonctions fondamentales

$$(51) \qquad V_1(x), \; V_2(x), \ldots, \; V_n(x), \ldots$$

qui est normale, orthogonale et fermée dans le corps des fonctions $f(x)$ bornées et intégrables en sens de M. Lebesgue, les fonctions $V_k(x)$ étant continues; on démontre facilement que la suite (47) possède dans ce cas la même propriété.*

En disant que la suite (51) est orthogonale et normale, nous supposons, pour simplifier, que

$$\int\limits_{(\Omega_y)} V_m(x) \, V_n(x) \, d\omega = 0, \quad m \neq n, \quad \int\limits_{(\Omega_y)} V_n^2(x) \, d\omega = 0.$$

* Voir Severini, Circolo di Palermo, t. 36, 1913.

La fonction $f(x)$, appartenant au corps des fonctions, pour lequel la fermeture de la suite (51) est établie, on a

$$\lim \int_{(\Omega_x)} (f(x) - S_n)^2 \, d\omega = 0, \quad n \to \infty,$$

où

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k V_k, \quad a_k = \int_{(\Omega_x)} f V_k \, d\omega.$$

Supposons que le domaine η est choisi de manière, qu'on ait

$$\int_{(\eta)} L(x) d\omega < \frac{\varepsilon}{4A},$$

en désignant par A la borne supérieure de $|f(x)|$, et désignons par M_η la borne supérieure de $L(x)$ dans le domaine $(\Omega_x - \eta)$.

On a, si $n \geqq N$,

$$\int_{(\Omega_x)} (f(x) - S_n)^2 \, d\omega < \frac{\varepsilon}{2 M_\eta}.$$

Formons une fonction $f_m(x)$ d'après la règle suivante. Posons

$$f_m(x) = S_n(x), \quad \text{si } |S_n(x)| \leqq A,$$
$$f_m(x) = A, \quad \text{si } S_n(x) > A, \quad f_m(x) = -A, \quad \text{si } S_n(x) < -A.$$

On trouve dans le premier cas

$$|f(x) - f_m(x)| = |f(x) - S_n(x)|;$$

dans le second cas on a

$$|f(x) - S_n(x)| = S_n(x) - f(x) > f_m(x) - f(x) = |f(x) - f_m(x)|$$

et, enfin, dans le troisième cas

$$|f(x) - S_n(x)| = f(x) + (-S_n(x)) > f(x) + (-f_m(x)) =$$
$$= |f(x) - f_m(x)|.$$

On a, donc, toujours

$$|f(x)-f_m(x)|<|f(x)-S_n(x)|;\quad |f(x)-f_m(x)|<2A$$

et

$$\int\limits_{(\Omega_x)}(f(x)-f_m(x))^2\,d\omega<\frac{\varepsilon}{2M_\eta}.$$

Il suit de là que

$$\int\limits_{(\Omega_x)}L(\omega)(f-f_m)^2\,d\omega=\int\limits_{(\Omega_x-\eta)}L(x)(f-f_m)^2\,d\omega+\int\limits_{(\eta)}L(\omega)(f-f_m)^2\,d\omega<$$

$$<\frac{M_\eta\,\varepsilon}{2M_\eta}+2A\int\limits_{(\eta)}L(\omega)\,d\omega<\varepsilon.$$

L'égalité (50) est donc établie et la suite (47) est fermée dans le corps de fonctions bornées et intégrables dans le sens de M. Lebesgue.*

Pour établir, en second lieu, que la suite (47) est fermée dans le corps de fonctions sommables, répondant à la condition (L), il suffit, en désignant par f_m la fonction, qui est égale à $f(x)$, si $|f(x)|$ est moindre que m et à $\pm m$, si $|f|$ surpasse m, de choisir m de manière qu'on ait

$$\int\limits_{(\Omega_x)}L(x)\,|f(x)-f_m(x)|^2\,d\omega<\varepsilon,$$

ce qui est possible, la mesure de l'ensemble, dans lequel $f(x)-f_m(x)$ est différente de zéro tendant vers zéro pour $m\to\infty$. L'inégalité (50) est de

* Pour établir que la suite (47) est fermée dans le corps de fonctions bornées et mesurables, on peut aussi se servir d'un théorème de M. Lousine: «Si $f(x)$ est une fonction mesurable définie dans l'intervalle $0\leq x\leq 1$, il existe une série de polynômes $\Sigma p_n(x)$ absolument convergente vers la fonction $f(x)$ pour tous les points de l'intervalle $0\leq x\leq 1$ sauf peut-être les points d'un ensemble de mesure nulle» (C. R., 1912, p. 1688; Recueil mathématique de Moscou, t. 28, pp. 277—282), qui, avec l'aide du théorème connu d'Égoroff sur la convergence uniforme des séries, étant généralisé sur les domaines à trois dimensions, permet d'établir l'existence pour chaque $\varepsilon>0$ d'un polynôme, dont les valeurs diffèrent de la fonction $f(x)$ moins que ε dans tous les points du domaine (Ω_x), excepté les points appartenants à un ensemble (E) ayant la mesure moindre que ε. Nous avons placé dans le texte notre démonstration, car elle n'exige pas l'emploi des théorèmes délicats de la théorie des ensembles et aboutit directement aux considérations de Stekloff en illustrant quelques points de la théorie des fonctions moyennes.

nouveau satisfaite et la suite (47), la fonction $f_m(x)$ étant bornée, est fermée dans le corps des fonctions sommables et répondant à la condition (L).

Il reste donc à établir l'existence d'une suite (51) jouissant des propriétés mentionnées ci-dessus.

Dans mon mémoire «Sur une application de la théorie de fermeture» j'ai montré,* en résumant les résultats conformément aux suppositions faites ci-dessus, que, 1) si $f(\omega)$ est la moyenne d'une fonction bornée et intégrable dans le sens de M. Lebesgue, la variable

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\omega_i)^2 \omega_i, \quad \Sigma(\omega_i) = (\omega) \tag{52}$$

a une limite, si on augmente le nombre des domaines (ω_i) en les partageant, (ω) étant une portion arbitraire de (Ω_x); 2) qu'on peut construire une fonction $f_\varepsilon(x)$ intégrable dans le sens de Riemann et jouissant de la propriété: si le nombre des domaines (ω_i) est assez grand, la différence

$$|f(\omega_i) - f_\varepsilon(x_i)|$$

est plus petite que ε pour les domaines (ω_i), excepté certains domaines dont la mesure totale ne surpasse pas ε; le point (x_i) est un point quelconque appartenant à (ω_i); et enfin (3) en se basant sur ces deux assertions que

$$\lim \Sigma f^2(\omega_i)\,\omega_i = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \tag{53}$$

$$B_k = \int_{(\Omega_x)} f(\omega)\, V_k\, d\omega = \int_{(\Omega_x)} f(x)\, V_k\, d\omega, \quad \Sigma(\omega_i) = (\Omega_x).$$

L'égalité (53) montre que la limite de la variable (52) ne dépend pas de la loi choisie pour la division du domaine (ω). En choisissant une loi déterminée pour la division de $(\Omega - \omega)$ et une loi quelconque pour la division de (ω), on voit que la somme des limites des deux variables étant indépendante de cette dernière loi, la limite de la variable (52) est de même.

---

* Bull. Acad Sc. de l'URSS, 1927, №№ 1, 2, §§ 7—10, pp. 76—92.

La limite de la variable (52) est donc une fonction des domaines (ω). En la désignant par $u(\omega)\,\omega$ on voit, que 1) $u(\omega)$ est bornée, étant plus petite que B^2, où B est la borne supérieure de $|f|$ et 2) que $u(\omega)$ est additive. La fonction $u(\omega)$ est donc la moyenne d'une fonction $F(x)$ intégrable dans le sens de M. Lebesgue.

Or, on a, la variable (52) étant croissante

$$f^2(\omega) < u(\omega);$$

on trouve donc, en passant vers la limite ayant posé $(\omega) \longrightarrow 0$, que presque partout

$$f^2(x) \leqq F(x)$$

d'où suit que

$$\int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega \leqq \int\limits_{(\omega)} F(x)\,d\omega.$$

L'inégalité de Schwarz conduit à l'inégalité

$$f^2(\omega)\,\omega^2 = \Big(\int\limits_{(\omega)} f(x)\,d\omega\Big)^2 \leqq \omega \int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega$$

d'où suit que

$$\lim \Sigma f^2(\omega_i)\,\omega_i \leqq \int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega.$$

On a donc

$$\int\limits_{(\omega)} F(x)\,d\omega \leqq \int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega \leqq \int\limits_{(\omega)} F(x)\,d\omega$$

c'est-à-dire

$$\lim \Sigma f^2(\omega_i)\,\omega_i = \int\limits_{(\omega)} F(x) d\omega = \int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega, \quad \Sigma(\omega_i) = (\omega).$$

L'égalité (53) prend la forme

$$\int\limits_{(\Omega_x)} f^2(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\,2}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si la fonction $f(x)$ appartient au corps de fonctions, pour lequel la fermeture de la suite (47) est établie, on a pour sa moyenne le développement

$$(54)\quad f(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(\omega) f(z)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\omega),\quad c_k = \int\limits_{(\Omega_y)} L(\tau) f(y)\,\varphi_k(y)\,d\tau.$$

Si $R_n(x)$ est le terme complémentaire du développement de $f(x)$, le terme complémentaire de la série (54) est égal à

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} LR_n\,d\omega$$

et on a

$$\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} LR_n\,d\omega\right)^2 < \frac{1}{\omega^2}\int\limits_{(\omega)} L(x)\,d\omega \int\limits_{(\omega)} L(x)\,R_n^2(x)\,d\omega < \frac{1}{\omega} L(\omega) \int\limits_{(\Omega_x)} L(x) R_n^2(x) d\omega,$$

d'où suit la convergence de la série (54), la convergence uniforme n'étant pas démontrée.

13. Revenons maintenant à l'équation (30) en lui donnant la forme

$$(30)\qquad \omega(Lv) = \lambda \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega,\ 1)\,\tau(Lv)\,d\tau + F(\omega),\quad \lambda = -\frac{1}{4\pi},$$

où

$$(55)\qquad F(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega,\ 1)\,\vartheta(\tau)\,d\tau.$$

L'équation (30) est l'associée de l'équation (31).

En appliquant le résultat du § 16 (4) on trouve que

$$(56)\quad \omega(Lv) = F(\omega) + \lambda \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega,\ y)\,F(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \lambda}{\lambda_k - \lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda_k}\varphi_k(\omega),$$

où

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi},\ c_k = \int\limits_{(\Omega_x)} F(\omega)\,\varphi_k(x)\,d\omega,$$

la convergence uniforme de la série n'étant pas démontrée.

Si l'on veut avoir affaire avec une série, qui pour sûr est uniformément convergente, il faut, en se souvenant que $k_3(\tau, x)$ est développable dans une série qui est uniformément convergente comme fonction de (τ) et de (x), utiliser les derniers résultats du § 16 (4). Ceci permet d'écrire

$$(56') \qquad \omega(Lv) = F(\omega) + \lambda \int_{(\Omega_y)} k(\omega, y) F(\tau)\, d\tau + \lambda^2 \int_{(\Omega_y)} k_2(\omega, y) F(\tau)\, d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} c_k \varphi_k(\omega).$$

En substituant à la place de $F(\omega)$ sa valeur (55) on trouve, en posant pour un court moment

$$\vartheta_1(\tau) = -\frac{1}{4\pi} \vartheta(\tau),$$

que

$$\int_{(\Omega_y)} k(\omega, y) F(\tau)\, d\tau = \int_{(\Omega_z)} \vartheta_1(\xi) k_2(\omega, z)\, d\xi, \quad \int_{(\Omega_y)} k_2(\omega, y) F(\tau)\, d\tau = \\ = \int_{(\Omega_z)} k_3(\omega, z) \vartheta_1(\xi)\, d\xi.$$

Or on a

$$\int_{(\Omega_y)} k_3(\omega, y) \vartheta_1(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\Omega_y)} \Sigma \frac{\varphi_k(\omega) \varphi_k(y) \vartheta(\tau)}{\lambda_k^3}\, d\tau = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\lambda_k^3} g_k \varphi_k(\omega),$$

où

$$g_k = \int_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau) \varphi_k(y)\, d\tau.$$

De même

$$c_k = \int_{(\Omega_x)} F(\omega) \varphi_k(x)\, d\omega = \int_{(\Omega_x)} \varphi_k(x) \left(\int_{(\Omega_y)} k(\omega, y) \vartheta_1(\tau)\, d\tau \right) d\omega = \\ = \int_{(\Omega_y)} \vartheta_1(\tau) \left(\int_{(\Omega_x)} k(\omega, y) \varphi_k(x)\, d\omega \right) d\tau = -\frac{1}{4\pi} \frac{g_k}{\lambda_k}.$$

On conclut de tout cela, en substituant dans (56′) et en y posant

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi},$$

que

$$(57')\qquad \omega(Lv) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau + \frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{(\Omega_y)} k_2(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{\lambda_k^2(1+4\pi\lambda_k)}\,\varphi_k(\omega),$$

la série étant uniformément convergente.

La série (56) prend la forme

$$(57)\qquad \omega(Lv) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{4\pi}\,\frac{1}{\lambda_k(1+4\pi\lambda_k)}\,\varphi_k(\omega)$$

en restant convergente.

Si la fonction $\vartheta(\tau)$ est la moyenne d'une fonction sommable $f(y)$, satisfaisant à la condition (L), l'intégrale

$$\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau, \qquad \vartheta(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(y)\,f(y)\,d\tau$$

est développable, suivant § 11, dans une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k\,\varphi_k(\omega)}{\lambda_k}, \qquad g_k = \int\limits_{(\Omega_x)} L(x)\,f(x)\,\varphi_k(x)\,d\omega = \int\limits_{(\Omega_x)} \vartheta(\omega)\,\varphi_k(x)\,d\omega,$$

qui est uniformément convergente.

La série (57) prend la forme

$$(58)\qquad \omega(Lv) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{1+4\pi\lambda_k}\cdot\varphi_k(\omega).$$

Or, g_k sont les coefficients de Fourier, correspondant à la fonction $f(x)$; la suite de leurs carrés est donc convergente. On en conclut aisément que la série (58) est uniformément convergente; en effet

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{g_k \varphi_k(\omega)}{1+4\pi\lambda_k}\right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} g_k^2 \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2} \cdot \frac{\lambda_k^2}{(1+4\pi\lambda_k)^2} <$$

$$< \sum_{k=n}^{k=m} g_k^2 \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\varphi_k^2(\omega)}{\lambda_k^2} < \varepsilon \int_{(\Omega_y)} L(\tau) k^2(\omega, y)\, d\tau < \varepsilon C^2 L^2(\omega);$$

le terme complémentaire de la série (58) est donc plus petit que

$$C\sqrt{\varepsilon}\, L(\omega).$$

14. Posons maintenant le problème, qui, sous certaines restrictions, peut être envisagé comme le problème de la chaleur.

Trouver la fonction $u(x, t)$ du point (x) et du temps t, qui répond aux conditions:

a) dans l'intérieur de (Ω_x) on a pour chaque domaine (ω), limité par la frontière (σ)

(59) $$\sigma(u)\sigma = \frac{\partial \omega\,(Lu)}{\partial t}\,\omega + \theta(\omega)\,\omega;$$

b) au moment $t = 0$, la moyenne $u(\omega, t)$ est égale à la moyenne d'une fonction donnée $f(x)$

(60) $$u(\omega, 0) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} f(x)\, d\omega,$$

$f(x)$ étant une fonction sommable, qui répond à la condition (L);

c) sur la frontière (S) du domaine (Ω_x) on a

(61) $$\text{ou } (\alpha)\ u(\sigma) = \mu(\sigma); \quad \text{ou } (\beta)\ \sigma^{(i)}(u) = \mu(\sigma);$$
$$\text{ou } (\gamma)\ \sigma^{(i)}(u) = -(hu)_\sigma + \mu(\sigma),$$

(σ) étant une portion de (S) et $\theta(\omega)$ avec $\mu(\sigma)$ — les fonctions moyennes continues des domaines, appartenant à (Ω_x), respectivement des portions de (S).

Nous supposons de plus que la fonction $L(x)$ ne dépend pas de t et satisfait aux conditions, mentionnées dans le § 4; c'est-à-dire, étant intégrable dans le sens de Riemann, pour chaque sphère (ω_0) du rayon ρ, elle satisfait à l'inégalité

$$|L(\omega_0)|\rho^{1-\lambda} < B.$$

Évidemment, le problème lui-même implique que la fonction moyenne

$$\frac{\partial\omega(Lu)}{\partial t}$$

soit à variation bornée.

Les considérations des §§ 4, 5, 6 permettent de substituer au problème posé le problème: trouver la fonction $v(x, t)$ telle que:

a) dans (Ω_x)

$$(59') \qquad \frac{1}{\omega}\sigma(v)\sigma = \frac{\partial\omega(Lv)}{\partial t} + \vartheta(\omega);$$

b) au moment $t = 0$:

$$(60') \qquad v(\omega, 0) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} F(x)\,d\omega:$$

c) sur (S),

$$(61') \qquad \text{ou } v(\sigma) = 0; \quad \text{ou } \sigma^{(i)}(v) = 0; \quad \text{ou } \sigma^{(i)}(v) = -(hv)_\sigma.$$

Nous avons ici

$$\vartheta(\omega) = \theta(\omega) + \frac{\partial\omega(Lw)}{\partial t} - \sigma(w), \quad F(x) = f(x) - w(x),$$

la fonction $w(x)$ étant définie dans les dits paragraphes.

En répétant les raisonnements des dits paragraphes, on obtient, en substituant partout $\frac{\partial\omega(Lv)}{\partial t}$ à la place de $\omega(Lv)$, que

$$(62) \quad v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} \frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t} G(1, \omega)\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\,G(1, \omega)\,d\tau,$$

$G(1, 0)$ étant la fonction de Green, attachée au problème, qui est définie par les conditions (61').

Marquons, avant tout, que grâce aux résultats du chapitre 8, on peut affirmer: si la fonction $v(x)$ satisfait à l'équation (62) et à la condition (60′), elle satisfait à l'équation (59′) et aux conditions (61′).

Comme la fonction $G(1, 0)$ est la somme de $\frac{1}{r_{10}}$ et de la fonction harmonique $\Gamma(1, 0)$, la partie droite de (62) est égale à

$$(62') \quad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\left\{\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}+\vartheta(\tau)\right\}m(1, \omega)\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\left\{\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}+\vartheta(\tau)\right\}\Gamma(1, \omega)\,d\tau$$

et l'existence de flux pour chaque domaine (ω) est assurée sous la seule condition que la fonction

$$(63) \qquad \frac{\partial\omega(Lv)}{\partial t}+\vartheta(\omega)$$

est continue, la moyenne du flux étant égale à cette fonction.

La fonction $\Gamma(1, \omega)$ étant la moyenne d'une fonction harmoniqne dans l'intérieur de (Ω_x), si (ω) est dans l'intérieur de (Ω_x) la fonction moyenne $\Gamma(1, \omega)$ possède les dérivées premières et secondes dans toutes les directions et son laplacien est égal à zéro; la continuité de la fonction (63) assure que le flux du second terme dans (62′) est égal à zéro; le laplacien du premier terme est égal à la fonction (63), suivant le théorème des §§ 7 (8) et 9 (8). Quand à la condition (61′) on s'assure qu'elle est satisfaite en formant la valeur moyenne $H(\sigma)$ ou, suivant le cas, son flux $\sigma(H)$, où $H(x)$ est la fonction harmonique, dont la moyenne est égale au second terme dans (62′); le choix de la fonction $\Gamma(1, 0)$ assure les égalités (61′).

Il suit de là qu'ayant construit une fonction $v(x)$, il faut s'assurer seulement, (1) qu'elle répond à la condition (60′); (2) que la fonction $\omega(Lv)$ possède la dérivée par rapport à t pour chaque choix du domaine (ω) et que cette dérivée est une fonction à variation bornée et continue; (3) que l'équation (62) est satisfaite.

15. En multipliant l'équation (62) par $L(x)$ et en l'intégrant, nous obtenons comme dans le § 7 l'équation

$$(64) \qquad \omega(Lv)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}k(\omega, y)\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau.$$

En intégrant l'équation (64) par rapport à t, nous obtenons

$$\int\limits_{\eta}^{t} \omega(Lv)\,dt = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\eta}^{t}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}\,d\tau\Big)\,dt - \tag{65}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\eta)}^{t}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau\Big)\,dt,$$

η étant un nombre positif.

Si la variation totale dans (Ω_y) de la fonction

$$\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t} \tag{66}$$

est bornée comme fonction de t dans l'intervalle

$$\eta \leqq t < T, \quad \eta > 0 \tag{67}$$

on trouve, en appliquant le théorème du § 9 (2), que

$$\int\limits_{\eta}^{t}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}\,d\tau\Big)\,dt = \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\Big(\int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}\,dt\Big)\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\tau(Lv)\,d\tau - \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,(\tau(Lv))_{\eta}\,d\tau$$

et l'égalité (65) prend la forme

$$\int\limits_{\eta}^{t} \omega(Lv)\,dt = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\tau(Lv)\,d\tau + \tag{65'}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,(\tau(Lv))_{\eta}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\eta}^{t}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\,\vartheta(\tau)\,d\tau\Big)\,dt.$$

Remarquons que les calculs imposent à la fonction $v(x)$ une nouvelle restriction. L'ayant formée, il faut s'assurer que (2') la variation totale de

la fonction (66) dans chaque intervalle (67) est bornée comme la fonction de t.

Soient

$$(68)\qquad \begin{cases} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k \ldots\ldots \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \ldots\ldots \end{cases}$$

les suites des nombres caractéristiques et des fonctions fondamentales du noyau $k(\tau, x)$, en supposant que la suite des fonctions fondamentales est normée et orthogonale. Posons

$$(69_1)\qquad \int\limits_{(\Omega_y)} \vartheta(\tau)\varphi_k(y)\,d\tau = a_k.$$

Si l'on a

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(y)\vartheta(y)\,d\tau,$$

la fonction $\vartheta(y)$ répondant à la condition (L), la série

$$(70_1)\quad \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\vartheta(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k(\omega),\qquad \varphi_k(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\varphi_k(x)\,d\omega$$

est absolument et uniformément convergente suivant le théorème du § 11 et on a

$$\int\limits_{\eta}^{t}\Bigg(\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\vartheta(\tau)\,d\tau\Bigg)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\omega)}{\lambda_k}\int\limits_{\eta}^{t} a_k\,dt.$$

Posons

$$(69_2)\qquad \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)F(y)\varphi_k(y)\,d\tau = b_k.$$

Si la fonction $F(y)$ répond à la condition (L), la série

$$(70_2)\qquad \int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)L(y)F(y)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\lambda_k}\varphi_k(\omega)$$

est absolument et uniformément convergente.

Supposons, enfin, que la fonction $v(x)$ est telle, que la série

$$(70_3) \qquad \int\limits_{(\Omega_y)} k(\tau, y)\,\tau(Lv)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k}\varphi_k(\omega)$$

dans laquelle

$$(69_3) \qquad \int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\,\varphi_k(y)\,d\tau = c_k$$

soit uniformément convergente; cela a lieu, par exemple, si la fonction $v(x)$ vérifie la condition (L).

Si la fonction (v) satisfait à l'équation $(65')$, les séries (70_1), et (70_3) étant uniformément convergentes, le développement de

$$\int\limits_{\eta}^{t} \omega(Lv)\,dt$$

suivant les valeurs moyennes $\varphi_k(\omega)$ des fonctions fondamentales doit être uniformément convergent.

Or, si l'on pose

$$\int\limits_{\eta}^{t} \omega(Lv)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\,\varphi_k(\omega),$$

on trouve

$$g_k = \int\limits_{(\Omega_y)} \varphi_k(y)\Big(\int\limits_{\eta}^{t} \tau(Lv)\,dt\Big)d\tau = \int\limits_{\eta}^{t}\Big(\int\limits_{(\Omega_y)} \tau(Lv)\,\varphi_k(y)\,d\tau\Big)dt = \int\limits_{\eta}^{t} c_k\,dt.$$

L'inversion des signes des intégrations est légitime, si la variation totale de la fonction $\tau(Lv)$ dans (Ω_y) est bornée comme la fonction de t dans l'intervalle (67), ce qu'on doit vérifier après la formation de la fonction v.

En identifiant les coefficients des divers termes dans les parties gauche et droite de $(65')$, on trouve

$$\int\limits_{\eta}^{t} c_k\,dt = -\frac{1}{4\pi}\frac{c_k}{\lambda_k} + \frac{1}{4\pi}\frac{(c_k)_\eta}{\lambda_k} - \frac{1}{4\pi\lambda_k}\int\limits_{\eta}^{t} a_k\,dt$$

ou

$$\frac{dc_k}{dt} + 4\pi\lambda_k c_k = -a_k,$$

d'où suit

(71)
$$c_k = h_k e^{-4\pi\lambda_k t} - e^{-4\pi\lambda_k t} \int_0^t e^{4\pi\lambda_k t} a_k dt$$

h_k restant encore indéterminée.

La fonction $F(x)$ satisfaisant à la condition (L), la série

(72)
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(\omega) = \omega(LF)$$

est convergente suivant le théorème du § 12.

Il suit de là, en premier lieu, que suivant la condition (b):

$$h_k = b_k;$$

on trouve

(73)
$$\omega(Lv) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) \int_0^t e^{4\pi\lambda_k t} a_k dt.$$

Si la fonction $\vartheta(\omega)$ ne dépend pas de t, les coefficients a_k sont indépendants de t et la série (73) prend la forme

(73′)
$$\omega(Lv) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4\pi\lambda_k} \left\{1 - e^{-4\pi\lambda_k t}\right\} \varphi_k(\omega).$$

Si la série, qu'on obtient en dérivant les termes de la série (73) par rapport à t, est uniformément convergente, nous avons

(74)
$$\frac{\partial\omega(Lv)}{\partial t} = -4\pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) +$$
$$+ 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) \int_0^t e^{4\pi\lambda_k t} a_k dt - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\omega),$$

respectivement

$$(74') \quad \frac{\partial\omega\,(Lv)}{\partial t} = -4\pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi\lambda_k t} a_k \varphi_k(\omega).$$

16. Il reste à étudier, si la fonction v construite par nous vérifie les conditions (1), (2) et (3).

Remarquons, en premier lieu, que pour chaque $\eta > 0$, si λ_k est assez grand

$$(75) \qquad \lambda_k^{\,s} e^{-4\pi\lambda_k\eta} < C,$$

C étant un nombre positif choisi arbitrairement.

On en conclut que dans chaque intervalle (67) les termes des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k e^{-4\pi\lambda_k t} \varphi_k(\omega)$$

sont plus petits en valeur absolue que les termes correspondants de la série (70_2), d'où suit que ces séries sont uniformément convergentes.

Si les coefficients a_k ne dépendent pas de t, on voit immédiatement, en comparant avec (70_1), que les secondes termes dans (74') et (73') sont les séries uniformément convergentes dans l'intérvalle (67).

La convergence uniforme des seconds termes dans les séries (73) et (74) n'est pas évidente. Pour n'interrompre pas les raisonnements nous supposerons que la fonction $\vartheta(x)$ est soumise aux restrictions qui assurent cette convergence; nous démontrerons plus loin, que cela a lieu, par exemple, si la moyenne

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} L(x)\,\vartheta(x)\,d\omega$$

possède les dérivées première et seconde par rapport à t, ces dérivées étant les moyennes des fonctions $\underline{\vartheta}(x)$ et $\bar{\vartheta}(x)$, jouissant des propriétés de la fonction $\vartheta(x)$ et si, de plus, les intégrales

$$\int_{(\Omega_y)} L(x)\,\underline{\vartheta}^2(x)\,d\omega, \quad \int_{(\Omega_x)} L(x)\,\bar{\vartheta}^2(x)\,d\omega$$

sont bornées comme les fonctions de t.

La convergence absolue et uniforme des séries (74) et (74') assure, que la fonction (66) a une variation totale bornée comme la fonction de t dans l'intervalle (67); pour la série (74'), si $t \geqq \eta$, le terme complémentaire, étant moindre que la somme des termes complémentaires des séries (70_1) et (70_2), est de la forme

$$2C\sqrt{\varepsilon}L(\omega)$$

d'où il suit que la variation totale de la somme de la série (74') ne surpasse pas

$$\sum_{k=1}^{k=n}\{4\pi\lambda_k|b_k| + |a_k|\}\, e^{-4\pi\lambda_k\eta}\, \Phi_k(\Omega_x)\Omega_x + 2C\sqrt{\varepsilon}\, L(\Omega_x)\Omega_x,$$

n étant un nombre, dépendant du choix de η et $\Phi_k(\omega)$ étant les variations moyennes des $\varphi_k(\omega)$.

Le choix des coefficients des série (69) assures que la condition (60'), c'est-à-dire la condition (1) du § 14 soit satisfaite.

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k(\omega),\quad b_k = \int_{(\Omega_y)} L(y)F(y)\varphi_k(y)\,d\tau$$

est convergente suivant le théorème du § 12, éventuellement, n'étant pas uniformément convergente; elle donne le développement de la moyenne de la fonction $L(x)\, F(x)$, où $F(x)$ répond à la condition (L).

Si pour $n \geqq N$ son terme complémentaire pour un choix de (ω) est plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$, le terme complémentaire da la première série dans (73) jouissant de la même propriété, la différence entre les sommes de ces séries ne surpasse pas en valeur absolue

$$\sum_{k=1}^{k=n}|b_k|\left(1 - e^{-4\pi\lambda_k t}\right)|\varphi_k(\omega)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

et est plus petite que ε pour un choix convenable de t.

La convergence de la série (74) assure l'existence d'une dérivée par rapport à t chez la fonction $\omega(Lv)$ dans l'intervalle (67), d'où suit que la condition (2) du § 14 est satisfaite.

Il reste la condition (3). En supposant, que t appartient à l'intervalle (67), multiplions la série (74) par $-\frac{1}{4\pi}k(\omega, y)$, ayant substitué dans cette série partout (τ) à la place de (ω), et intégrons le produit. Nous obtenons

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}d\tau =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-4\pi\lambda_k}\varphi_k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi\lambda_k t}\int\limits_0^t e^{4\pi\lambda_k t} a_k\, dt\, \varphi_k(\omega) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\varphi_k(\omega)}{\lambda_k} = \omega(Lv) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)} k(\omega, y)\vartheta(\tau)\, d\tau.$$

Nous restituons, ainsi, l'équation (64). Pour passer de l'équation (64) à l'équation (62), remarquons, qu'en connaissant la moyenne $\omega(Lv)$ pour chaque domaine (ω), on peut dire qu'on connaît presque partout la fonction $L(x)v(x)$ et en se souvenant des restrictions, imposées à $L(x)$, qu'on connaît presque partout $v(x)$, c'est-à-dire, qu'on connaît $v(\omega)$ pour chaque domaine (ω).

Ayant posé

$$(62') \quad v(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\frac{\partial\tau(Lv)}{\partial t}G(1, \omega)\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Omega_y)}\vartheta(\tau)G(1, \omega)\, d\tau + \alpha(\omega)$$

on voit, que $\alpha(\omega)$, étant absolument continue, est la moyenne d'une fonction sommable $\alpha(x)$. En multipliant (62′) par $L(x)$ et en intégrant, on trouve, vu l'équation (64), que pour chaque domaine (ω)

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\alpha(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\alpha(x)\, d\omega = 0.$$

La valeur de la moyenne

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\alpha(x)\, d\omega = 0,$$

qui est presque partout égale à $L(x)\alpha(x)$, est donc partout égale à zéro; il suit de là que $\alpha(x)$ est presque partout égale à zéro, et que, pour chaque domaine (ω):

$$\alpha(\omega)=0.$$

L'équation (62) est donc satisfaite, c'est-à-dire, la condition (3) est remplie.

17. Il reste à étudier les restrictions, imposées à la fonction $\vartheta(\omega)$.

Supposons que la fonction $\tau(L\vartheta)$ possède une dérivée par rapport à t et que cette dérivée est égale à la moyenne $\tau(L\underline{\vartheta})$ d'une fonction sommable $\underline{\vartheta}$, qui répond à la condition (L). Ayant posé

$$\underline{a}_k=\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(L\underline{\vartheta})\,\varphi_k(y)\,d\tau$$

nous obtenons

$$a_k=\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(L\vartheta)\,\varphi_k(y)\,d\tau=\int\limits_{(\Omega_y)}\Bigl(\int\limits_0^t\tau(L\underline{\vartheta})\,dt\Bigr)\,\varphi_k(y)\,d\tau+\int\limits_{(\Omega_y)}(\tau(L\vartheta))_0\,\varphi_k(y)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\Bigl(\int\limits_{(\Omega_y)}\tau(L\underline{\vartheta})\,\varphi_k(y)\,d\tau\Bigr)\,dt+\int\limits_{(\Omega_y)}(\tau(L\vartheta))_0\,\varphi_k(y)\,d\tau=\int\limits_0^t\underline{a}_k\,dt+(a_k)_0.$$

Il suit de là que

$$\underline{a}_k=\frac{da_k}{dt}.$$

Après cette remarque, on trouve

$$e^{-4\pi\lambda_k t}\int\limits_0^t e^{4\pi\lambda_k t}\,a_k\,dt=\frac{a_k-(a_k)_0}{4\pi\lambda_k}-\frac{1}{4\pi\lambda_k}\,e^{-4\pi\lambda_k t}\int\limits_0^t e^{4\pi\lambda_k t}\frac{da_k}{dt}\,dt.$$

Le second terme de la série (73) prend la forme

$$(76)\qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-(a_k)_0}{\lambda_k}\,\varphi_k(\omega)-\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-4\pi\lambda_k t}}{\lambda_k}\int\limits_0^t e^{4\pi\lambda_k t}\frac{da_k}{dt}\,dt\,\varphi_k(\omega).$$

La première série dans (76) est uniformément et absolument convergente, ne différant pas de la série (70_1).

Or,

$$\left(\frac{da_k}{dt}\right)^2 = |\underline{a}_k|^2 = \left(\int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\underline{\vartheta}(y)\varphi_k(y)\,d\tau\right)^2 <$$

$$< \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\varphi_k^2(y)\,d\tau \int\limits_{(\Omega_y)} L(y)\underline{\vartheta}^2(y)\,d\tau < B.$$

On conclut de là que les termes de la seconde série (76) sont moindres en valeur absolue que les termes de la série

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-4\pi\lambda_k t}}{\lambda_k}\int_0^t e^{4\pi\lambda_k t} B\,dt \,.\, |\varphi_k(\omega)| = \frac{B}{(4\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{1 - e^{-4\pi\lambda_k t}\right\}\frac{|\varphi_k(\omega)|}{\lambda_k^2}$$

qui est uniformément convergente.

La série des dérivées par rapport à t des termes de la série (76) est égale à

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi\lambda_k t}\int_0^t e^{4\pi\lambda_k t}\frac{da_k}{dt}\,dt \,.\, \varphi_k(\omega). \tag{77}$$

En supposant de nouveau que la fonction $\tau(L\underline{\vartheta})$ possède une dérivée et que cette dérivée est égale à la moyenne $\tau(L\bar{\vartheta})$ d'une fonction sommable $\bar{\vartheta}$, qui répond à la condition (L), on s'assure, que la série (77) est uniformément et absolument convergente.

18. Ayant ainsi posé le problème: trouver une fonction sommable $v(x, t)$ vérifiant les conditions:

α) $$\frac{1}{\omega}\sigma(v)\sigma = \frac{\partial\omega(Lv)}{\partial t} + \vartheta(\omega)$$

pour chaque domaine (ω) appartenant à (Ω), (σ) étant la frontière de (ω);

β) $$v(\omega, 0) = F(\omega)$$

pour le moment initial $t = 0$ et

γ) $$u(\sigma) = 0, \quad \text{ou} \quad \sigma^{(i)}(v) = 0, \quad \text{ou} \quad \sigma^{(i)}(v) = -(hv)_\sigma,$$

(σ) étant la portion de la frontière (S) de (Ω), nous l'avons résolu sous les conditions suivantes:

1) $h(x)$ est une fonction bornée des points sur (S), intégrable en sens de Riemann.

2) $L(x)$ est une fonction intégrable en sens de Riemann et telle que pour chaque sphère (ω_0) du rayon ρ le produit $L(\omega)\rho^{1-\lambda}$, $0 < \lambda \leqq 1$, soit borné.

3) $\vartheta(\omega)$ et $F(\omega)$ sont les moyennes

$$\vartheta(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} L(x)\vartheta(x)\,d\omega, \quad F(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} F(x)\,d\omega.$$

des fonctions sommables $\vartheta(x)$ et $F(x)$, répondant à la condition (L).

4) La moyenne $\omega(L\vartheta)$ possède les dérivées première et seconde par rapport à t, qui sont les moyennes des fonctions sommables, vérifiant la condition (L).

Nous disons que la fonction sommable f vérifie la condition (L), si la fonction Lf^2 est sommable et nous désignons par $\omega(Lv)$ la moyenne du produit Lv pour le domaine (ω), et par $(hv)_\sigma$ la moyenne du produit hv pour la portion (σ) de la surface (S).

La solution est donnée par la série

$$(73)\quad \omega(Lv) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-4\pi\lambda_k t}\varphi_k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi\lambda_k t}\varphi_k(\omega)\int_0^t e^{4\pi\lambda_k t} a_k\,dt,$$

où

$$a_k = \int\limits_{(\Omega_x)} L(x)\vartheta(x)\varphi_k(x)\,d\omega, \quad b_k = \int\limits_{(\Omega_x)} L(x)F(x)\varphi_k(x)\,d\omega,$$

λ_k sont les nombres caractéristiques du noyau

$$k(\tau, x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} L(y)\,G(x, y)\,d\tau,$$

$G(x, y)$ étant, suivant le cas, la fonction de Green du problème de Dirichlet, du problème de Neumann ou du problème de la température stationnaire;

$\varphi_k(\omega)$ sont les moyennes des fonctions fondamentales, qui correspondent aux nombres λ_k, en supposant que leur suite est normée et orthogonale.

La série (73) est uniformément convergente dans (Ω_x) pour chaque intervalle $\eta \leqq t$, $\eta > 0$.

Nous n'affirmons pas que la solution, trouvée par nous, soit unique.

Mais parmi les solutions, jouissant de la propriéte suivante: la moyenne $\omega(Lv)$ possède pour chaque (ω) la dérivée par rapport à t, cette dérivée étant la moyenne d'une fonction sommable, vérifiant la condition (L), notre solution est unique.

En effet, sous cette condition la moyenne $\omega(Lv)$ donnée par l'égalité (64), est développable dans une série suivant les moyennes des fonctions fondamentales qui est uniformément convergente dans (Ω).

On peut, donc, en répétant les calculs du § 16 trouver les coefficients de ce développement et restituer la série (73).

LE CALCUL DES RÉSIDUS

By E. LINDELÖF

The calculus of residues has important applications in a striking diversity of mathematical fields: statistics, number theory, the theory of Fourier series, the calculus of finite differences, mathematical physics and advanced calculus as well as function theory itself.

Lindelöf's standard treatise is from the famous series of books on function theory, the *Collection Borel.* Long out of print, this work will find a welcome place in the libraries of statisticians, mathematicians and mathematical physicists.

PARTIAL CONTENTS

Function-theoretic principles and fundamental theorems.

Applications to meromorphic functions, Bernoulli numbers and definite integrals.

Summation formulas (including the bearing of summation formulas on the convergence of Fourier Series).

Gamma, Zeta and other special functions.

Applications to analytic continuation and to the asymptotic study of functions defined by Taylor series.

Cloth 151 pages 5½ x 8½ inches

$2.95

CHELSEA PUBLISHING COMPANY, 231 W. 29th STREET, NEW YORK

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN REELLER FUNKTIONEN

By E. KAMKE

The special importance of Kamke's famous work on ordinary and partial differential equations lies in its unusually thorough treatment of the *foundations;* the existence and uniqueness of solutions, their behavior and their topological structure are studied *exhaustively*. This includes recent work by Perron, Müller and Kamke, which appears here for the first time in book form.

A full one hundred pages of the text are devoted to the study of *systems of equations*. The Nagumo uniqueness theorem, the general theorem, on dependence of solutions on initial and other conditions, the differentiability of solutions with respect to parameters and the Knopp-Schmidt proof of the fundamental theorem on functional determinants are among the many topics whose proofs are available elsewhere only in the original memoirs.

". . . outstanding for precisely formulated concepts, and remarkable for the care given to the systematic development of the entire presentation."—*Zeitschrift für den Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht.*

1930 450 pages 5½ x 8½ inches

Originally published at $12.80

$4.50

CHELSEA PUBLISHING COMPANY, 231 W. 29th STREET, NEW YORK